PROBLEMAS DE LA FÍSICA MATEMÁTICA

B.M. Budak,
A.A. Samarski
A.N. Tijonov



MIR


www.FreeLibros.com


ИЗДАТЕЛЬСТВО
МИР

Б. М. Будак
А. А. Самарский
А. Н. Тихонов

Сборник задач по математической физике

Том 2

Издательство «Наука»
Москва

B.M. Budak
A.A. Samarski
A.N. Tíjonov

PROBLEMAS DE LA FÍSICA MATEMÁTICA

Tomo 2

Editorial Mir
Moscú

Traducido del ruso por
José Ramil Alvarez,
candidato a doctor en
ciencias físico-matemáticas

На испанском языке

Impreso en la URSS

ÍNDICE

Capítulo V

ECUACIONES DE TIPO PARABÓLICO

Las ecuaciones de tipo parabólico se obtienen al investigar fenómenos tales como la conductibilidad térmica, la difusión, la propagación del campo electromagnético en los medios conductores, el movimiento de un líquido viscoso, el curso de las aguas subterráneas, etc.

En este capítulo se examinan el planteamiento y la resolución de los problemas de contorno para las ecuaciones de tipo parabólico en el caso cuando los procesos físicos examinados se caracterizan por funciones de dos, tres o cuatro variables independientes; este capítulo es la continuación del capítulo tres en que se tratan las ecuaciones de tipo parabólico para funciones de dos variables independientes.

§ 1. Problemas físicos que se reducen a ecuaciones de tipo parabólico; planteamiento de los problemas de contorno

1. El semiespacio $z > 0$ está lleno de un líquido con coeficiente de conductibilidad térmica λ, densidad de masa ρ y calor específico c.

Plantear el problema de contorno acerca del calentamiento del líquido si éste se mueve con una velocidad v_0 = const en el sentido del eje x, entre el líquido y el plano $z = 0$ se realiza el intercambio de calor según la ley de Newton, la temperatura del plano de frontera $z = 0$ es igual a u_0. Examinar, en particular, el caso de la distribución estacionaria de la temperatura con la condición de que se puede despreciar la transferencia de calor en el sentido del eje x, como resultado de la conductibilidad térmica, en comparación con la transferencia de calor por la masa móvil del líquido.

2. Formular el problema de la difusión análogo al problema 1, suponiendo que el plano $z = 0$ es impermeable a las partículas de la sustancia en difusión; plantear los problemas de contorno en los casos estacionario y no estacionario.

3. Deducir la ecuación de la difusión para una sustancia cuyas partículas

a) se desintegran (por ejemplo, un gas inestable, el radón), además la velocidad de desintegración en cada punto del espacio es proporcional a la concentración;

b) se multiplican (por ejemplo, la difusión de los neutrones al existir la fusión nuclear), además la velocidad de la multiplicación en cada punto del espacio es proporcional a la concentración.

4. Plantear el problema de contorno sobre la propagación del campo electromagnético en el espacio no acotado lleno de un medio conductor con conductibilidad $\sigma = \text{const}$, la permeabilidad magnética $\mu = \text{const}$ y la constante dieléctrica $\varepsilon = \text{const}$.

5. Plantear el problema de contorno acerca del enfriamiento de una placa plana no acotada si sobre su superficie se realiza el intercambio de calor por convección con un medio ambiente de temperatura igual a cero.

Examinar, en particular, el caso cuando la variación de la temperatura según el espesor de la placa es despreciablemente pequeña.

6. Un tubo cilíndrico circular está lleno de un líquido con conductibilidad térmica muy grande*); fuera del tubo hay aire con temperatura $U_0 = \text{const}$. Plantear el problema de contorno para determinar la temperatura del tubo, suponiendo que ésta es independiente de la distancia media a lo largo del mismo.

7. Un cilindro circular infinito de radio r_0, con momento de inercia K sobre una unidad de longitud, está en un líquido viscoso; para $t > 0$ el cilindro se pone en revolución por la acción del momento M sobre una unidad de longitud.

Utilizando la expresión, en coordenadas cilíndricas, de las ecuaciones del movimiento del líquido viscoso y de las componentes del tensor de las tensiones**), plantear el problema de contorno sobre el movimiento viscoso y del cilindro.

8. Una capa del suelo está sobre una base horizontal impermeable y contiene en sí las aguas subterráneas. El vector U del flujo de las aguas subterráneas está relacionado con el vector V de la velocidad del movimiento de las partículas de estas aguas por la relación

$$U = mV,$$

donde el coeficiente m se llama porosidad del suelo.

La fuerza de resistencia aplicada a una partícula del agua referida al peso específico del agua, según la ley experimental es igual a

$$f = -\frac{1}{k} U,$$

donde k es el llamado coeficiente de filtración***).

Denominamos presión excesiva referida al peso específico del agua, a la diferencia entre las presiones real e hidrostática en las aguas subterráneas.

*) Se trata de la conductibilidad térmica sumaria incluyendo la transferencia de calor por las corrientes de convección del líquido.

**) Véanse las respuestas e indicaciones.

***) Acerca de la terminología véase [23].

Plantear el problema de contorno acerca del movimiento de la superficie libre de las aguas subterráneas, con los supuestos siguientes:

1) la componente horizontal del gradiente de la presión excesiva es despreciablemente pequeña,

2) las fuerzas de inercia que actúan sobre las partículas de las aguas subterráneas son despreciablemente pequeñas.

§ 2. El método de separación de variables *)

1. Problemas de contorno que no exigen la utilización de las funciones especiales

En este apartado se examinan tales problemas de contorno para unas regiones con las fronteras planas y esféricas las soluciones de que se expresan en la forma de las series respecto a las funciones propias más simples (elementales) del operador de Laplace para estas regiones.

a) Medios homogéneos

9. Hallar la temperatura del paralelepípedo $0 \leqslant x \leqslant l_1$, $0 \leqslant y \leqslant l_2$, $0 \leqslant z \leqslant l_3$, si su temperatura inicial es una función arbitraria de x, y, z y la temperatura de la superficie se mantiene igual a cero.

10. Resolver el problema anterior para un cubo con arista l, si en el momento inicial él estaba calentado uniformemente. Hallar el momento de tiempo a partir del cual en el centro del cubo tendrá lugar a ciencia cierta un régimen regular con exactitud relativa $\varepsilon > 0$**).

11. Hallar la temperatura del paralelepípedo $0 \leqslant x \leqslant l_1$, $0 \leqslant y \leqslant l_2$, $0 \leqslant z \leqslant l_3$ sobre cuya superficie se realiza el intercambio de calor por convección con un medio de temperatura nula, si su temperatura inicial es igual a $f(x, y, z)$; examinar, en particular, el caso cuando $f(x, y, z) = U_0 \equiv \text{const}$.

12. Sobre la superficie del cubo calentado en el momento inicial uniformemente, se realiza el intercambio de calor por convección con un medio de temperatura igual a cero. Hallar la expresión para la temperatura en el centro del cubo y determinar el momento de tiempo empezando a partir del cual en el centro del cubo tendrá lugar a ciencia cierta un régimen regular con exactitud relativa $\varepsilon > 0$.

13. Las paredes del tubo rectangular semiacotado $0 \leqslant x < +\infty$, $0 \leqslant y \leqslant l_1$, $0 \leqslant z \leqslant l_2$ se mantienen a una temperatura igual a cero. Por el tubo se mueve cierto medio con velocidad constante v_0 en

*) Véase la segunda llamada en la pág. 32 del tomo I.

**) Véase el problema 22 del § 2, cap, III.

el sentido del eje x. Hallar la temperatura del medio móvil, despreciando la transferencia de calor en el sentido del eje x como resultado de la conductibilidad térmica*), en las condiciones siguientes: 1) el proceso es estacionario, 2) entre el medio y las paredes del tubo se realiza el intercambio de calor según la ley de Newton, 3) la temperatura del medio en la sección $x = 0$ es igual a $U_0 \equiv$ const.

14. Sea que en el cubo $0 \leqslant x, y, z \leqslant l$ se realiza la difusión de una sustancia cuyas partículas se multiplican con una velocidad proporcional a la concentración (véase el problema 3). Hallar las dimensiones críticas del cubo, es decir, hallar la longitud de la arista l a partir de la cual el proceso de la multiplicación adquiere el carácter de avalancha**). Examinar los casos cuando

a) sobre todas las caras la concentración se mantiene igual a cero,

b) todas las caras son impermeables,

c) todas las caras son semiimpermeables.

15. Hallar la temperatura de la esfera de radio r_0, cuya superficie se mantiene a una temperatura nula. En el momento inicial de tiempo la temperatura de la esfera era igual a

$$u\,|_{t=0} = f(r), \quad 0 \leqslant r < r_0.$$

16. La temperatura inicial de la esfera $0 \leqslant r \leqslant r_0$ es igual a

$$u\,|_{t=0} = U_0 \equiv \text{const},$$

sobre la superficie de la esfera se mantiene la temperatura $U_1 \equiv$ const. Hallar la temperatura de la esfera para $t > 0$. Determinar el momento de tiempo a partir del cual en el centro de la esfera tendrá lugar a ciencia cierta un régimen regular con exactitud relativa $\varepsilon > 0$.

17. La temperatura inicial de la esfera $0 \leqslant r \leqslant r_0$ es igual a

$$u\,|_{t=0} = U_0 \equiv \text{const},$$

y dentro de la esfera a través de su superficie se suministra un flujo constante de calor de densidad q. Hallar la temperatura de la esfera para $t > 0$.

18. Hallar la temperatura de la esfera de radio r_0 sobre cuya superficie se realiza el intercambio de calor por convección con un medio de temperatura igual a cero. La temperatura inicial de la esfera es

$$u\,|_{t=0} = f(r), \quad 0 \leqslant r < r_0.$$

19. La temperatura inicial de la esfera $0 \leqslant r \leqslant r_0$ es igual a

$$u\,|_{t=0} = U_0 \equiv \text{const}$$

*) Véase el problema 1.

**) Para más detalles acerca de la noción de las dimensiones críticas véase [7], pág. 524-525.

y sobre su superficie se realiza el intercambio de calor por convección con un medio de la temperatura constante $U_1 \equiv$ const. Hallar la temperatura de la esfera para $t > 0$.

Determinar el momento de tiempo a partir del cual en el centro de la esfera tendrá lugar a ciencia cierta un régimen regular con exactitud relativa $\varepsilon > 0$.

20. La temperatura inicial de la esfera $0 \leqslant r < r_0$ es igual a

$$u|_{t=0} = U_0 \equiv \text{const}$$

y sobre su superficie desde el momento $t = 0$ se realiza el intercambio de calor por convección con un medio cuya temperatura es

$$U_0 + \alpha t, \quad 0 < t < +\infty, \quad U_0 = \text{const}, \quad \alpha = \text{const}.$$

Hallar la temperatura de la esfera para $t > 0$.

21. Resolver el problema acerca del enfriamiento de la capa esférica $r_1 \leqslant r \leqslant r_2$ sobre cuyas superficies interior y exterior se realiza el intercambio de calor por convección con un medio que tiene una temperatura nula. La temperatura inicial de la capa es igual a

$$u|_{t=0} = f(r), \quad r_1 < r < r_2.$$

22. En un recipiente esférico cerrado $0 \leqslant r \leqslant R$ se realiza la difusión de una sustancia, cuyas partículas se multiplican, además, la velocidad de la multiplicación es proporcional a la concentración (véase el problema 14). Hallar las dimensiones críticas del recipiente. Examinar los casos cuando

a) sobre la superficie del recipiente se mantiene una concentración igual a cero,

b) la pared del recipiente es impermeable,

c) la pared del recipiente es semiimpermeable.

b) Medios heterogéneos; factores concentrados

23. Hallar la temperatura de una viga de sección transversal rectangular $0 \leqslant x \leqslant l_1$, $0 \leqslant y \leqslant l_2$ compuesta de dos vigas homogéneas (de propiedades físicas diferentes) con las secciones transversales $0 \leqslant x \leqslant x_0$, $0 \leqslant y \leqslant l_2$ y $x_0 \leqslant x \leqslant l_1$, $0 \leqslant y \leqslant l_2$; los topes de la viga son termoaislados y la superficie lateral se mantiene a una temperatura igual a cero. La temperatura inicial de la viga es

$$u|_{t=0} = f(x, y), \quad 0 \leqslant x \leqslant l_1, \quad 0 \leqslant y \leqslant l_2.$$

24. Hallar la temperatura del paralelepípedo rectangular compuesto de dos paralelepípedos rectangulares homogéneos $[0 \leqslant x \leqslant x_0,\ 0 \leqslant y \leqslant l_2,\ 0 \leqslant z \leqslant l_3]$ y $[x_0 \leqslant x \leqslant l_1,\ 0 \leqslant y \leqslant l_2,\ 0 \leqslant z \leqslant l_3]$ hechos de materiales diferentes. La superficie del paralelepípedo compuesto se mantiene a una temperatura igual a cero y su temperatura inicial es

$$u|_{t=0} = f(x, y, z), \quad 0 \leqslant x \leqslant l_1, \quad 0 \leqslant y \leqslant l_2, \quad 0 \leqslant z \leqslant l_3.$$

25. La esfera $0 \leqslant r \leqslant r_1$ está compuesta de una esfera homogénea $0 \leqslant r \leqslant r_0$ y la capa esférica $r_0 \leqslant r \leqslant r_1$, elaboradas de materiales diferentes. Hallar la temperatura de la esfera si su superficie se mantiene a una temperatura igual a cero y la temperatura inicial de la esfera es

$$u\,|_{t=0} = f(r), \quad 0 \leqslant r \leqslant r_1.$$

26. En la cavidad interior de una capa esférica gruesa $r_1 \leqslant r \leqslant r_2$ se contiene el líquido con la conductibilidad térmica muy grande, es decir, tal que su temperatura todo el tiempo es igual a la temperatura de la superficie interior de la capa. Hallar la temperatura de la capa si su superficie exterior se mantiene a una temperatura igual a cero y la temperatura inicial es

$$u\,|_{t=0} = f(r), \quad r_1 \leqslant r \leqslant r_2.$$

2. Problemas de contorno que exigen la utilización de funciones especiales

En este punto se examinan tales problemas de contorno para las regiones acotadas por los planos, esferas y cilindros circulares, cuyas soluciones se expresan por series con respecto a las funciones propias generales del operador de Laplace para estas regiones, es decir, por funciones propias compuestas por funciones cilíndricas o esféricas.

a) Medios homogéneos

27. Resolver el problema acerca del calentamiento del cilindro circular infinito $0 \leqslant r \leqslant r_0$, cuya temperatura inicial es igual a cero, si sobre su superficie se mantiene la temperatura $U_0 = \text{const}$. Hallar también en las condiciones del régimen regular la expresión aproximada de la temperatura media por la sección transversal del cilindro.

28. Hallar la temperatura del cilindro circular infinito con la condición de que la temperatura inicial sea igual a

$$u|_{t=0} = U_0 \left(1 - \frac{r^2}{r_0^2}\right),$$

y sobre su superficie se mantenga una temperatura igual a cero. Hallar en las condiciones del régimen regular la expresión aproximada para la temperatura media por la sección transversal del cilindro.

29. Hallar la temperatura del cilindro circular infinito $0 \leqslant r \leqslant r_0$ si su temperatura inicial es igual a

$$u\,|_{t=0} = U_0 \equiv \text{const},$$

y sobre su superficie desde el momento $t = 0$ se suministra desde afuera un flujo constante de calor de densidad q.

30. Hallar la temperatura del cilindro circular infinito de radio r_0 si la temperatura inicial es

$$u|_{t=0} = f(r), \quad 0 \leqslant r \leqslant r_0,$$

y sobre la superficie del cilindro se realiza el intercambio de calor por convección con un medio de temperatura igual a cero. Examinar, en particular, el caso cuando $f(r) = U_0 \equiv \text{const}$, y escribir la expresión aproximada para la temperatura en las condiciones del régimen regular.

31. La temperatura inicial del cilindro circular no acotado $0 \leqslant r \leqslant r_0$ es

$$u|_{t=0} = U_0 \equiv \text{const},$$

y sobre la superficie del cilindro se realiza el intercambio de calor por convección con un medio de temperatura igual a $U_1 = \text{const}$.

Hallar la temperatura del cilindro para $t > 0$.

32. Resolver el problema anterior si la temperatura del medio es igual a $U_1 + \alpha t$, donde U_1 y α son constantes.

33. Fuera del cilindro conductor circular infinito $0 \leqslant r \leqslant r_0$ en el momento $t = 0$ se establece instantáneamente el campo magnético constante H_0, paralelo al eje del cilindro.

Hallar la intensidad del campo magnético en el interior del cilindro con las condiciones iniciales nulas; determinar después el flujo de la inducción magnética a través de la sección transversal del cilindro.

34. Resolver el problema anterior si la intensidad del campo magnético exterior es igual a

$$H = H_0 \cos \omega t, \quad H_0 = \text{const}, \quad 0 < t < +\infty.$$

35. La temperatura inicial del tubo cilíndrico circular infinito $r_1 \leqslant r \leqslant r_2$ es igual a

$$u|_{t=0} = f(r), \quad r_1 \leqslant r \leqslant r_2.$$

Hallar la temperatura del tubo para $t > 0$ si sobre su superficie interior se mantiene la temperatura $U_1 \equiv \text{const}$ y sobre la superficie exterior, la temperatura $U_2 \equiv \text{const}$.

36. La temperatura del tubo cilíndrico circular infinito es igual a cero para $t < 0$. Desde el momento $t = 0$, a través de su superficie exterior se suministra desde afuera un flujo constante de calor de densidad q y la superficie interior del tubo se mantiene a una temperatura igual a cero.

Hallar la temperatura del tubo para $t > 0$.

37. Resolver el problema acerca del enfriamiento del tubo cilíndrico circular infinito sobre cuyas superficies interior y exterior se realiza un intercambio de calor por convección con un medio de la temperatura nula. En el momento inicial el tubo estaba calentado uniformemente.

38. Entre dos cilindros concéntricos de longitud infinita hay un líquido viscoso. En el momento $t = 0$ el cilindro exterior empieza a girar con una velocidad angular $\omega \equiv$ const.

Determinar la velocidad del movimiento del líquido.

39. Hallar la temperatura del cilindro circular no acotado $0 \leqslant r \leqslant r_0$, si su temperatura inicial es

$$u|_{t=0} = f(r, \varphi), \quad 0 \leqslant r \leqslant r_0, \quad 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi,$$

y sobre la superficie se mantiene una temperatura igual a cero.

40. Hallar la temperatura del cilindro circular no acotado $0 \leqslant r \leqslant r_0$ si su temperatura inicial es igual a

$$u|_{t=0} = f(r, \varphi), \quad 0 \leqslant r \leqslant r_0, \quad 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi,$$

y sobre su superficie se realiza el intercambio de calor por convección con un medio cuya temperatura es igual a cero.

41. Hallar la temperatura del tubo cilíndrico circular no acotado $r_1 \leqslant r \leqslant r_2$ si su temperatura inicial es

$$u|_{t=0} = f(r, \varphi), \quad r_1 < r < r_2, \quad 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi,$$

y sobre sus superficies interior y exterior se mantiene una temperatura igual a cero.

42. Hallar la temperatura del tubo cilíndrico circular no acotado $r_1 \leqslant r \leqslant r_2$ si su temperatura inicial es igual a

$$u|_{t=0} = f(r, \varphi), \quad r_1 < r < r_2, \quad 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi,$$

y sobre sus superficies interior y exterior se realiza el intercambio de calor por convección con un medio la temperatura de que es igual a cero.

43. Hallar la temperatura del sector cilíndrico infinito $0 \leqslant r \leqslant r_0$, $0 \leqslant \varphi \leqslant \varphi_0$ si sobre la superficie $r = r_0$ y las caras $\varphi = 0$ y $\varphi = \varphi_0$ se mantiene una temperatura igual a cero y la temperatura inicial es

$$u|_{t=0} = f(r, \varphi), \quad 0 < r < r_0, \quad 0 < \varphi < \varphi_0.$$

44. Hallar la temperatura del sector cilíndrico infinito $0 \leqslant r \leqslant r_0$, $0 \leqslant \varphi \leqslant \varphi_0$ si sobre la superficie $r = r_0$ se realiza el intercambio de calor por convección con un medio cuya temperatura es igual a cero, las caras $\varphi = 0$ y $\varphi = \varphi_0$ son termoaisladas y la temperatura inicial es

$$u|_{t=0} = f(r, \varphi), \quad 0 < r < r_0, \quad 0 < \varphi < \varphi_0.$$

45. Hallar la temperatura del sector cilíndrico infinito $r_1 \leqslant r \leqslant r_2$, $0 \leqslant \varphi \leqslant \varphi_0$ si su superficie se mantiene a una temperatura igual a cero y la temperatura inicial es

$$u|_{t=0} = f(r, \varphi), \quad r_1 < r < r_2, \quad 0 < \varphi < \varphi_0.$$

46. Hallar la temperatura del sector cilíndrico infinito $r_1 \leqslant r \leqslant r_2$, $0 \leqslant \varphi \leqslant \varphi_0$, si sobre las superficies $r = r_1$ y $r = r_2$ se realiza el intercambio de calor por convección con un medio de temperatura igual a cero, las caras $\varphi = 0$ y $\varphi = \varphi_0$ son termoaisladas y la temperatura inicial es

$$u|_{t=0} = f(r, \varphi), \quad r_1 < r < r_2, \quad 0 < \varphi < \varphi_0.$$

47. Hallar la temperatura del cilindro circular finito $0 \leqslant r \leqslant r_0$, $0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$, $0 \leqslant z \leqslant l$, cuya superficie se mantiene a una temperatura igual a cero, si la temperatura inicial es

$$u|_{t=0} = f(r, \varphi, z), \; 0 \leqslant r < r_0, \; 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi, \; 0 < z < l.$$

48. Hallar la temperatura del cilindro circular finito $0 \leqslant r \leqslant r_0$, $0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$, $0 \leqslant z \leqslant l$, sobre cuya superficie se realiza el intercambio de calor con un medio de temperatura igual a cero, si la temperatura inicial del cilindro es

$$u|_{t=0} = f(r, \varphi, z), \; 0 \leqslant r < r_0, \; 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi, \; 0 < z < l.$$

49. Resolver el problema acerca del enfriamiento de una esfera de radio r_0 sobre cuya superficie se mantiene una temperatura igual a cero. La temperatura inicial de la esfera es

$$u|_{t=0} = f(r, \theta, \varphi), \quad 0 \leqslant r < r_0, \quad 0 \leqslant \theta \leqslant \pi, \quad 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi.$$

50. Resolver el problema acerca del enfriamiento de la esfera de radio r_0, si sobre su superficie se realiza el intercambio de calor por convección con un medio de temperatura igual a cero. La temperatura inicial de la esfera es

$$u|_{t=0} = f(r, \theta, \varphi), \quad 0 \leqslant r < r_0, \quad 0 \leqslant \theta \leqslant \pi, \quad 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi.$$

51. Resolver el problema acerca del enfriamiento de una cápsula esférica gruesa $r_1 \leqslant r \leqslant r_2$, cuyas superficies interior y exterior se mantienen a una temperatura igual a cero. La temperatura inicial de la cápsula es

$$u|_{t=0} = f(r, \varphi, \theta), \quad r_1 < r < r_2, \quad 0 \leqslant \theta \leqslant \pi, \quad 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi.$$

52. Resolver el problema acerca del enfriamiento de una cápsula esférica gruesa $r_1 \leqslant r \leqslant r_2$ sobre cuyas superficies interior y exterior se realiza el intercambio de calor por convección con un medio de temperatura igual a cero. La temperatura inicial de la cápsula es

$$u|_{t=0} = f(r, \theta, \varphi), \; r_1 < r < r_2, \; 0 \leqslant \theta \leqslant \pi, \; 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi.$$

b) Medios heterogéneos; factores concentrados

53. El cilindro circular heterogéneo $0 \leqslant r \leqslant r_1$, $0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$, $0 \leqslant z \leqslant l$ está compuesto de un cilindro homogéneo $0 \leqslant r \leqslant r_0$, $0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$, $0 \leqslant z \leqslant l$ y de un tubo cilíndrico homogéneo $r_0 \leqslant$

$\leqslant r \leqslant r_1$, $0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$, $0 \leqslant z \leqslant l$, hechos de materiales diferentes.

Hallar la temperatura del cilindro compuesto si su superficie se mantiene a una temperatura igual a cero y la temperatura inicial es

$$u|_{t=0} = f(r, \varphi, z), \quad 0 \leqslant r < r_1, \quad 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi, \quad 0 < z < l.$$

54. Resolver el problema acerca del enfriamiento del tubo cilíndrico infinito $r_1 \leqslant r \leqslant r_2$ lleno de un líquido enfriador, si la temperatura de este líquido todo el tiempo es igual a la temperatura de la superficie interior del tubo y la superficie exterior es termoaislada. La temperatura inicial del tubo es igual a

$$u|_{t=0} = f(r), \quad r_1 < r < r_2.$$

55. Resolver el problema anterior, suponiendo que sobre la superficie exterior del tubo se realiza el intercambio de calor por convección con un medio la temperatura del cual es igual a cero.

56. El cilindro de radio r_1 con momento de inercia K sobre una unidad de longitud está hundido en un líquido y se lleva en giro por el momento $M \equiv$ const sobre la unidad de longitud.

Determinar el movimiento del líquido y del cilindro si el líquido llena el espacio entre el cilindro y el tubo coaxial inmóvil con el radio interior $r_2 > r_1$. Considerar que el cilindro y el tubo son infinitamente largos. En el momento inicial de tiempo el cilindro y el líquido estaban en reposo.

57. Fuera de un conductor cilíndrico hueco $r_1 \leqslant r \leqslant r_2$ de longitud infinita en el momento $t = 0$ se establece instantáneamente el campo magnético constante H_0 paralelo al eje del cilindro.

Hallar el campo magnético dentro del conductor con las condiciones iniciales nulas, suponiendo que en la cavidad interior el campo es homogéneo y también que fuera y dentro del tubo existe un vacío.

58. La esfera heterogénea $0 \leqslant r \leqslant r_1$ está compuesta de una esfera homogénea $0 \leqslant r \leqslant r_0$ y de una cápsula esférica homogénea $r_0 \leqslant r \leqslant r_1$ elaboradas de materiales diferentes.

Hallar la temperatura de la esfera si su superficie se mantiene a una temperatura igual a cero y la temperatura inicial es

$$u|_{t=0} = f(r, 0, \varphi), \quad 0 \leqslant r < r_1, \quad 0 \leqslant \theta \leqslant \pi, \quad 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi.$$

§ 3. Método de representaciones integrales

En este parágrafo se examina la utilización de las representaciones integrales a la solución de los problemas de contorno de la teoría de la conductibilidad térmica. Primero se incluyen los problemas sobre la utilización de la integral de Fourier, después sobre la construcción y el empleo de las funciones de manantiales.

1. Utilización de la integral de Fourier

59. Hallar la distribución de la temperatura en un espacio no acotado, con temperatura inicial

$$u|_{t=0}=f(x, y, z), \quad -\infty<x, y, z<+\infty.$$

Examinar también el caso particular cuando $f(x, y, z)$ no depende de z.

60. Hallar la temperatura del espacio no acotado provocada por los manantiales de acción continua con densidad $g(x, y, z, t)$; la temperatura inicial del espacio es igual a cero. Examinar también los casos particulares cuando $g(x, y, z, t)$ no depende de t y cuando $g(x, y, z, t)$ no depende de z.

61. Resolver el problema de contorno

$$u_t=a^2\Delta u, \quad -\infty<x, y<+\infty, \quad 0<z<+\infty, \quad 0<t<+\infty,$$
$$u|_{z=0}=0, \quad -\infty<x, y<+\infty, \quad 0<t<+\infty,$$
$$u|_{t=0}=f(x, y, z), \quad -\infty<x, y<+\infty, \quad 0<z<+\infty.$$

Examinar también el caso particular cuando f no depende de y.

62. Resolver el problema de contorno

$$u_t=a^2\Delta u, \quad -\infty<x, y<+\infty, \quad 0<z<+\infty, \quad 0<t<+\infty,$$
$$u|_{z=0}=f(x, y, t), \quad -\infty<x, y<+\infty, \quad 0<t<+\infty,$$
$$u|_{t=0}=0, \quad -\infty<x, y<+\infty, \quad 0<z<+\infty.$$

Examinar también el caso particular cuando f no depende de y.

63. Resolver el problema de contorno

$$u_t=a^2\Delta u, \quad -\infty<x, y<+\infty, \quad 0<z, \quad t<+\infty,$$
$$u_z|_{z=0}=0, \quad -\infty<x, y<+\infty, \quad 0<t<+\infty,$$
$$u|_{t=0}=f(x, y, z), \quad -\infty<x, y<+\infty, \quad 0<z<+\infty.$$

64. Resolver el problema de contorno

$$u_t=a^2\Delta u, \quad -\infty<x, y<+\infty, \quad 0<z, \quad t<+\infty,$$
$$u_z|_{z=0}=f(x, y, t), \quad -\infty<x, y<+\infty, \quad 0<t<+\infty,$$
$$u|_{t=0}=0, \quad -\infty<x, y<+\infty, \quad 0<z<+\infty.$$

2-0942

65. Resolver el problema de contorno

$$u_t = a^2 \Delta u, \qquad -\infty < x,\ y < +\infty,\ 0 < z,\ t < +\infty,$$

$$u_z - hu = 0, \qquad -\infty < x,\ y < +\infty,\ z = 0,\ 0 < t < < +\infty,$$

$$u|_{t=0} = f(x, y, z),\ -\infty < x,\ y < +\infty,\ 0 < z < +\infty.$$

Examinar también el caso particular cuando f no depende de y.

66. Resolver el problema de contorno

$$u_t = a^2 \Delta u,\ -\infty < x,\ y < +\infty,\ 0 < z,\ t < +\infty,$$

$$u_z = h[u - f(x, y, t)],\ -\infty < x,\ y < +\infty,\ z = 0,\ 0 < t < +\infty,$$

$$u|_{t=0} = 0,\ -\infty < x,\ y < +\infty,\ 0 < z < +\infty.$$

Examinar también el caso particular cuando f no depende de y.

67. Resolver el problema de contorno

$$u_t = a^2 \Delta u + f(x, y, z, t),\ -\infty < x,\ y < +\infty,\ 0 < z,\ t < +\infty,$$

$$u|_{z=0} = 0,\ -\infty < x,\ y < +\infty,\ 0 < t < +\infty,$$

$$u|_{t=0} = 0,\ -\infty < x,\ y < +\infty,\ 0 < z < +\infty.$$

68. Hallar la temperatura de una viga no acotada con sección transversal rectangular $0 \leqslant x \leqslant l_1$, $0 \leqslant y \leqslant l_2$, $-\infty < z < +\infty$, si su temperatura inicial es

$$u|_{t=0} = f(x, y, z),\ 0 \leqslant x \leqslant l_1,\ 0 \leqslant y \leqslant l_2,\ -\infty \leqslant z \leqslant +\infty$$

y sobre la superficie

a) se mantiene una temperatura igual a cero;

b) tiene lugar la aislación térmica;

c) se realiza el intercambio de calor por convección con un medio de temperatura nula.

69. Resolver el problema anterior para una viga semiacotada con la sección transversal rectangular: $0 \leqslant x \leqslant l_1$, $0 \leqslant y \leqslant l_2$, $0 < z < +\infty$; examinar los casos que corresponden a las condiciones de frontera a) y b).

70. Hallar la temperatura de un cilindro circular infinito $0 \leqslant r \leqslant r_0$, $0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$, $-\infty < z < +\infty$, si su temperatura inicial es

$$u|_{t=0} = f(r, \varphi, z),\ 0 \leqslant r < r_0,\ 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi,\ -\infty < z < +\infty,$$

y sobre la superficie se cumple una de las siguientes condiciones de frontera:

a) la temperatura de la superficie se mantiene igual a cero;
b) la superficie es termoaislada;
c) sobre la superficie se realiza el intercambio de calor por convección con un medio ambiente cuya temperatura es igual a cero.

71. Hallar la temperatura de un cilindro semiacotado circular $0 \leqslant r \leqslant r_0$, $0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$, $0 \leqslant z < +\infty$, si su temperatura inicial es

$$u|_{t=0} = f(r, \varphi, z), \quad 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi, \quad 0 \leqslant r \leqslant r_0, \quad 0 < z < +\infty$$

y sobre la superficie se cumple una de las siguientes condiciones de frontera:
a) la temperatura de la superficie se mantiene igual a cero;
b) la superficie es termoaislada.

72. Hallar la temperatura de un sector cilíndrico no acotado $0 \leqslant r \leqslant r_0$, $0 \leqslant \varphi \leqslant \varphi_0$, $-\infty < z < +\infty$, si su temperatura inicial es

$$u|_{t=0} = f(r, \varphi, z), \quad 0 < \varphi < \varphi_0, \quad 0 < r < r_0, \quad -\infty < z < +\infty$$

y sobre la superficie se cumple una de las siguientes condiciones de frontera:
a) la temperatura de la superficie se mantiene igual a cero;
b) la superficie es termoaislada.

73. Resolver el problema anterior para un sector cilíndrico semiacotado $0 \leqslant r \leqslant r_0$, $0 \leqslant \varphi \leqslant \varphi_0$, $0 \leqslant z < +\infty$.

74. Hallar la temperatura de una placa que tiene la forma de sector no acotado $0 \leqslant r < +\infty$, $0 \leqslant \varphi \leqslant \varphi_0$, si su temperatura inicial es

$$u|_{t=0} = f(r, \varphi), \quad 0 < r < +\infty, \quad 0 < \varphi < \varphi_0$$

y sobre los bordes de la placa:
a) se mantiene una temperatura igual a cero;
b) tiene lugar la aislación térmica.

75. Resolver el problema anterior, suponiendo que un borde de la placa es termoaislado y la temperatura del otro se mantiene igual a cero.

76. Hallar la temperatura de una cuña no acotada con el ángulo de abertura φ_0 si sobre sus caras:
a) se mantiene una temperatura nula;
b) tiene lugar la aislación térmica.

77. Hallar la temperatura de un espacio no acotado con una cavidad cilíndrica circular infinita si la temperatura inicial es igual a cero y la temperatura sobre la superficie de la cavidad se mantiene igual a U_0.

2. Construcción y utilización de las funciones de influencia de los manantiales puntiformes instantáneos de calor

78. Demostrar que el producto de las soluciones $u_1(x, t)$, $u_2(y, t)$, $u_3(z, t)$ de los problemas de contorno

$$\frac{\partial u_1}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2}, \quad -\infty < x < +\infty, \quad 0 < t < +\infty, \tag{1'}$$

$$u_1|_{t=0} = f_1(x), \qquad -\infty < x < +\infty, \tag{2'}$$

$$\frac{\partial u_2}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u_2}{\partial y^2}, \quad -\infty < y < +\infty, \quad 0 < t < +\infty, \tag{1''}$$

$$u_2|_{t=0} = f_2(y), \qquad -\infty < y < +\infty, \tag{2''}$$

$$\frac{\partial u_3}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u_3}{\partial z^2}, \quad -\infty < z < +\infty, \quad 0 < t < +\infty, \tag{1'''}$$

$$u_3|_{t=0} = f_3(z), \quad -\infty < z < +\infty, \tag{2'''}$$

es la solución del problema de contorno

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \left\{ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right\},$$

$$-\infty < x, \ y, \ z < +\infty, \quad 0 < t < +\infty, \tag{1}$$

$$u|_{t=0} = f_1(x) f_2(y) f_3(z), \quad -\infty < x, \ y, \ z < +\infty. \tag{2}$$

79. Utilizando las expresiones de las funciones de influencia de los manantiales puntiformes instantáneos de calor para las rectas $-\infty < x < +\infty$, $-\infty < y < +\infty$, $-\infty < z < +\infty$ y la suposición formulada en el problema 78, escribir la función de influencia del manantial puntiforme instantáneo de calor para el espacio

$$-\infty < x, \ y, \ z < +\infty.$$

80. Mediante la función de influencia hallada en el problema anterior resolver el problema de contorno

$$u_t = a^2 \Delta u + F(x, y, z, t), \quad -\infty < x, \ y, \ z < +\infty, \quad 0 < t < +\infty,$$

$$u|_{t=0} = f(x, y, z), \quad -\infty < x, \ y, \ z < +\infty.$$

81. Escribir la expresión de la función de influencia del manantial puntiforme instantáneo de calor para el semiespacio $-\infty < x$, $y < +\infty$, $0 < z < +\infty$ que corresponda a las condiciones de frontera

a) $u|_{z=0} = 0$,

b) $u_z|_{z=0} = 0$,

c) $(u_z - hu)|_{z=0} = 0$,

por las funciones unidimensionales correspondientes de influencia análogamente como se hizo en la solución del problema 79.

82. Mediante las funciones de influencia halladas en el problema anterior resolver los problemas de contorno

a) $u_t = a^2 \Delta u + F(x, y, z, t)$, $-\infty < x, y < +\infty$, $0 < z, t < +\infty$,

$u|_{z=0} = \Phi(x, y, t)$, $-\infty < x, y < +\infty$, $0 < t < +\infty$,

$u|_{t=0} = f(x, y, z)$, $-\infty < x, y < +\infty$, $0 < z < +\infty$;

b) $u_t = a^2 \Delta u + F(x, y, z, t)$, $-\infty < x, y < +\infty$, $0 < z, t < +\infty$,

$u_z|_{z=0} = \Phi(x, y, t)$, $-\infty < x, y < +\infty$, $0 < t < +\infty$,

$u|_{t=0} = f(x, y, z)$, $-\infty < x, y < +\infty$, $0 < z < +\infty$;

c) $u_t = a^2 \Delta u + F(x, y, z, t)$, $-\infty < x, y < +\infty$, $0 < z, t < +\infty$,

$(u_z - hu)|_{z=0} = h\Phi(x, y, t)$, $-\infty < x, y < +\infty$, $0 < t < +\infty$,

$u|_{t=0} = f(x, y, z)$, $-\infty < x, y < +\infty$, $0 < z < +\infty$.

83. Sea D una región cilíndrica (infinita, semiacotada o finita) paralela al eje z, y sea D_{xy} su intersección con el plano xy. Sean dadas sobre la superficie de la región D las condiciones de frontera de primero, segundo o tercer género.

Demostrar que el producto de la correspondiente función de influencia del manantial puntiforme instantáneo de calor para todo el eje z, del semieje z o del segmento finito del eje z por la función de influencia del manantial puntiforme instantáneo de calor para la región plana D_{xy} es la función de influencia del manantial puntiforme instantáneo de calor para la región D.

84. Utilizando la afirmación formulada en el problema anterior, escribir la expresión de la función de influencia del manantial puntiforme instantáneo de calor para la capa plana $-\infty < x, y < +\infty$, $0 < z < l$. Examinar los casos cuando sobre los planos de frontera $z = 0$ y $z = l$:

a) se mantiene una temperatura nula;

b) tiene lugar la aislación térmica;

c) uno de los planos de frontera ($z = 0$) es termoaislado y sobre el otro ($z = l$) se mantiene una temperatura nula;

d) sobre los ambos planos de frontera se realiza el intercambio de calor por convección con un medio de temperatura nula.

85. Construir la función de influencia del manantial puntiforme instantáneo de calor para la viga no acotada con la sección transversal rectangular $0 \leqslant x \leqslant l_1$, $0 \leqslant y \leqslant l_2$, $-\infty < z < +\infty$ si sobre la superficie de la viga

a) se mantiene una temperatura nula;

b) tiene lugar la aislación térmica.

86. Construir la función de influencia del manantial puntiforme instantáneo de calor para el paralelepípedo rectangular $0 \leqslant x \leqslant l_1$, $0 \leqslant y \leqslant l_2$, $0 \leqslant z \leqslant l_3$. Examinar los casos cuando la superficie del paralelepípedo:

a) se mantiene a una temperatura nula;

b) es termoaislada.

87. Mediante el método de reflexión construir la función de influencia del manantial puntiforme instantáneo de calor para una cuña no acotada con ángulo de abertura $\frac{\pi}{m}$, donde m es un número natural. Examinar los casos cuando los planos de frontera $\varphi = 0$ y $\varphi = \frac{\pi}{m}$:

a) se mantienen a una temperatura igual a cero;

b) son termoaislados.

88. Hallar la distribución de la temperatura en el espacio no acotado, producida por el hecho de que en el momento inicial de tiempo sobre la superficie esférica de radio r' se desprendieron instantáneamente Q unidades de calor distribuidas uniformemente. (Construcción de la función de influencia del manantial esférico instantáneo de calor).

89. Mediante la función del manantial hallada en el problema anterior resolver el problema de contorno

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial u}{\partial r}\right) + f(r, t), \quad 0 < r, \ t < +\infty.$$

$$u(r, 0) = F(r), \quad 0 < r < +\infty,$$

donde $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

90. Hallar la distribución de la temperatura en el espacio no acotado producida por el hecho de que en el momento inicial de tiempo en cada unidad de longitud de la superficie cilíndrica infinita de radio r' se desprendieron Q unidades de calor distribuidas uniformemente. (Construcción de la función de influencia del manantial cilíndrico instantáneo de calor.)

91. Mediante la función de influencia hallada en la solución del problema anterior resolver el problema de contorno

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r}\right) + f(r, t), \quad 0 < r, \quad t < +\infty, \tag{1}$$

$$u(r, 0) = F(r), \quad 0 < r < +\infty, \tag{2}$$

donde $r = \sqrt{x^2 + y^2}$.

92. Hallar la función de influencia del manantial puntiforme instantáneo para la ecuación de la difusión si el medio en que se realiza la difusión se mueve con una velocidad constante v con respecto al sistema de coordenadas en examen.

93. Hallar la función de influencia del manantial puntiforme inmóvil de potencia constante para la ecuación de la difusión en un medio que se mueve con velocidad constante v en el sentido del eje x, si el proceso de la difusión es estacionario y si se puede despreciar la transferencia de la sustancia en el sentido del eje x en comparación con la transferencia como resultado del movimiento del medio (véase el problema 2).

94. Resolver el problema anterior para el semiespacio $0 < z < +\infty$, examinando los casos cuando:

a) el plano $z = 0$ es impermeable;

b) sobre el plano $z = 0$ se mantiene una concentración igual a cero;

c) el plano $z = 0$ es semiimpermeable, además, debajo de él (es decir, para $z < 0$) se mantiene una concentración igual a cero.

95. Hallar la concentración de la sustancia en difusión en el espacio no acotado que se desprende por un manantial puntiforme de potencia $f(t)$ con las coordenadas $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, $z = \varkappa(t)$, si la concentración inicial de esta sustancia en el espacio es igual a cero.

96. Hallar la concentración de la sustancia en difusión en un espacio no acotado cuya concentración inicial es igual a

$$u|_{t=0} = \begin{cases} U_0 \equiv \text{const} & \text{para } 0 \leqslant r < r_0, \\ 0 & \text{para } r_0 < r < +\infty, \end{cases}$$

donde r es el radio-vector del sistema esférico de coordenadas.

97. Resolver el problema anterior para el semiespacio $z > 0$, suponiendo que $z_0 < r_0$ y $(0, 0, z_0)$ son las coordenadas del centro de la esfera, en el cual la concentración inicial es igual a U_0. Examinar los casos cuando

a) el plano $z = 0$ es impermeable para la sustancia en difusión,

b) sobre el plano $z = 0$ se mantiene una concentración igual a cero.

98. Hallar la concentración de la sustancia en difusión en el espacio no acotado si su concentración inicial es igual a

$$u|_{t=0} \begin{cases} U_0 \equiv \text{const} & \text{para } 0 \leqslant r < r_0, \\ 0 & \text{para } r_0 < r < +\infty, \end{cases}$$

donde r es el radio-vector del sistema cilíndrico de coordenadas.

99. Resolver el problema anterior para el semiespacio $x \geqslant 0$ suponiendo que el cilindro es paralelo al eje z y su eje interseca el plano $z = 0$ en el punto $(x_0, 0)$, donde $x_0 > r_0$. Examinar los casos cuando:

a) el plano $x = 0$ es impermeable para la sustancia en difusión,

b) sobre el plano $x = 0$ se mantiene una concentración igual a cero.

100. El canal con las paredes verticales y el fondo impermeable de súbito se llena do agua de tal manera que en una parte, para $x < 0$, el nivel del agua es $H_1 =$ const y en la otra parte, para $x > 0$, $H_2 =$ const, y ulteriormente estos niveles se mantienen invariables (véase la fig. en la respuesta al problema, el eje vertical H es perpendicular al plano del dibujo).

En el momento inicial el nivel de las aguas subterráneas en la capa del suelo $y > 0$ es igual a $H_0 =$ const.

Considerando que la capa está sobre una base impermeable que es la continuación del fondo del canal, hallar el nivel de las aguas subterráneas $H(x, y, t)$ para $t > 0$ $(y > 0)$.

101. Sobre la superficie de la cavidad esférica $0 \leqslant r \leqslant r_0$ de un espacio no acotado la temperatura debe variarse según la ley $u|_{r=r_0} = \varphi(t)$, donde $\varphi(t)$ es una función dada de tiempo; la temperatura inicial del espacio es igual a cero.

¿Qué flujo de calor se debe suministrar de la cavidad esférica al espacio para asegurar tal ley de variación de la temperatura sobre la superficie de la cavidad?

Capítulo VI

ECUACIONES DE TIPO HIPERBÓLICO

A las ecuaciones de tipo hiperbólico llevan los problemas de carácter dinámico de la mecánica de los medios continuos (acústica, hidrodinámica, aerodinámica, teoría de elasticidad) y los problemas de electrodinámica*). En el capítulo presente se examinan el planteamiento y la solución de los problemas de contorno de tipo hiperbólico para las funciones de dos y más variables independientes, así que este capítulo es la continuación y el desarrollo del cap. II en que se examinan los problemas de tipo hiperbólico sólo para las funciones de dos variables independientes. Al igual que en el capítulo II las oscilaciones de los medios continuos en todas partes de este capítulo se consideran pequeñas en el sentido usual de la palabra.

§ 1. Problemas físicos que conducen a las ecuaciones de tipo hiperbólico; planteamiento de los problemas de contorno

En este párrafo se examina el planteamiento de los problemas de contorno para los procesos de la mecánica de los medios continuos. El planteamiento de los problemas de electrodinámica se examinan en el cap. IV**).

1. Plantear el problema de contorno acerca de la propagación de las perturbaciones pequeñas en un gas ideal homogéneo que llena un espacio no acotado, tomando por la función que caracteriza el proceso una de las magnitudes: la densidad del gas ρ, la presión en el gas p, el potencial de velocidades de las partículas del gas U, el vector de la velocidad de las partículas del gas $v = iv^{(1)} + jv^{(2)} + kv^{(3)}$, el potencial del desplazamiento de las partículas del gas Φ o el vector del desplazamiento de las partículas del gas $u = iu^{(1)} + ju^{(2)} + ku^{(3)}$. Demostrar que utilizando una de estas magnitudes se puede expresar cualquiera otra de ellas.

2. Deducir las condiciones de frontera para el potencial de velocidades de las partículas del gas U***), el potencial del desplazamiento Φ, la densidad ρ y la presión p sobre el plano que acota el semiespacio, lleno con este gas.

*) Las ecuaciones de la teoría relativista de la gravitación con las salvedades conocidas, también pertenecen al tipo hiperbólico.

**) Véase también [7], págs. 493-507.

***) Acerca de la notación véase la respuesta al problema 1.

Examinar los casos cuando este plano:

a) está inmóvil,

b) se mueve con la velocidad subsónica en el sentido de su normal según una ley dada.

3. El espacio está lleno con dos gases ideales diferentes, la frontera de separación de los mismos es la superficie Σ*). Suponiendo que las presiones no perturbadas en ambos gases son iguales, plantear el problema de contorno sobre la propagación de las perturbaciones pequeñas en el gas.

4. Plantear el problema de contorno sobre las oscilaciones transversales de una membrana con el borde fijo inmóvil si en el estado no perturbado la membrana es plana y el medio ambiente no produce resistencia a las oscilaciones de la misma.

Observación. El problema sobre las oscilaciones de la membrana es el análogo bidimensional del problema sobre las oscilaciones de la cuerda**).

5. Plantear el problema de contorno sobre las oscilaciones de la membrana tendida sobre el hueco de un recipiente cerrado, teniendo en cuenta la variación de la presión en el recipiente excitada por las oscilaciones de la membrana y considerando que la velocidad de propagación de las perturbaciones pequeñas en el gas es considerablemente más grande que la velocidad de propagación de las ondas en la membrana (el problema sobre las oscilaciones de la membrana del tambor).

6. Deducir la ecuación de la propagación de las perturbaciones pequeñas en un gas que se mueve a velocidad constante con respecto al sistema de coordenadas.

7. Plantear el problema de contorno sobre el contorneado estacionario subsónico de una cuña inmóvil por el flujo plano paralelo simétrico del gas ideal.

8. Plantear el problema de contorno sobre el contorneado estacionario subsónico del cono circular por un gas ideal en el sentido del eje del cono, considerando que el flujo no perturbado es homogéneo y las perturbaciones excitadas por el cono son pequeñas.

9. Sea que el nivel de un líquido ideal en un estanque con el fondo horizontal y las paredes verticales en el estado no perturbado es igual a $h =$ const. Con oscilaciones pequeñas de la superficie libre pueden surgir movimientos en que las partículas del líquido, que están en cualquier vertical, se mueven de modo igual en las direcciones horizontales. Sea $\zeta(x, y, t)$ la elevación de la superficie perturbada sobre el nivel del líquido en reposo. Considerando la presión p en el líquido perturbado a una profundidad igual a la hi-

*) La superficie geométrica. Se supone que durante el tiempo de examen la frontera de separación de los gases Σ puede considerarse como una superficie infinitamente delgada.

**) Véase cap. II. § 1 y también [7], págs. 39-42.

drostática, plantear el problema de contorno sobre la propagación de las perturbaciones pequeñas en la capa, tomando por la función que caracteriza el proceso: 1) $\zeta(x, y, t)$; 2) el potencial de las velocidades (horizontales) de las partículas del líquido si la presión p_0 sobre la superficie del líquido queda constante (véase el problema 7 del cap. II. § 1).

10. Plantear el problema de contorno 9 para el caso cuando p_0 es una función dada de x, y, t, tomando por la función que caracteriza el proceso el potencial de las velocidades horizontales.

11. Deducir la ecuación del movimiento del centro de la masa del elemento infinitésimo del medio elástico, tomando el elemento en la forma de un paralelepípedo rectangular con las aristas paralelas a los ejes de las coordenadas.

12. Utilizando la ley de Hooke para el medio elástico, isotrópico y homogéneo, representar las ecuaciones del movimiento halladas en el problema anterior, de forma que contenga sólo las componentes del vector de las fuerzas volumétricas y del vector del desplazamiento

$$\boldsymbol{U} = \boldsymbol{i}u(x, y, z, t) + \boldsymbol{j}v(x, y, z, t) + \boldsymbol{k}w(x, y, z, t)$$

y demostrar que el "largamiento a todas partes" $\Theta = \operatorname{div} \boldsymbol{U}$ y el rotor $\boldsymbol{B} = \operatorname{rot} \boldsymbol{U}$ satisfacen, cada uno por separado, la ecuación ondulatoria de d'Alembert $\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} = a^2\Delta\varphi$ además para Θ la constante $a^2 = \frac{\lambda + 2\mu}{\rho}$ y para $\boldsymbol{B}$ la constante $a^2 = \frac{\mu}{\rho}$ *).

Observaciones. 1. Cualquier vector $\boldsymbol{U}$ se determina unívocamente por su divergencia div $\boldsymbol{U}$ y el rotor rot $\boldsymbol{U}$ (véase [14], pág. 209).

2. La forma del elemento del medio elástico, que tiene en el estado no deformado la forma descripta en el problema 11, en el estado deformado se determina por las magnitudes

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \varepsilon_y = \frac{\partial u}{\partial y}, \quad \varepsilon_z = \frac{\partial u}{\partial z},$$

$$\gamma_{xy} = \gamma_{yx} = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}, \quad \gamma_{yz} = \gamma_{zy} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y},$$

$$\gamma_{zx} = \gamma_{xz} = \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z},$$

que forman el tensor de la deformación

$$(D) = \begin{Vmatrix} \varepsilon_x & \gamma_{xy} & \gamma_{xz} \\ \gamma_{yx} & \varepsilon_y & \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} & \gamma_{zy} & \varepsilon_z \end{Vmatrix}.$$

*) Las ondas elásticas «longitudinales» se propagan más rápidamente que las «transversales».

En el caso cuando el medio es homogéneo y isotrópico las componentes del tensor de la tensión (véase la respuesta al problema anterior)

$$(T)=\begin{Vmatrix}\sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz}\\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz}\\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z\end{Vmatrix},$$

están relacionadas por las correlaciones siguientes con las componentes del tensor de las deformaciones

$$\sigma_x=\lambda\Theta+2\mu\frac{\partial u}{\partial x},\quad \sigma_y=\lambda\Theta+2\mu\frac{\partial v}{\partial y},\quad \sigma_z=\lambda\Theta+2\mu\frac{\partial w}{\partial z},$$

$$\tau_{yz}=\tau_{zy}=\mu\left(\frac{\partial w}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial z}\right),\quad \tau_{zx}=\tau_{xz}=\mu\left(\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial x}\right);$$

$$\tau_{xy}=\tau_{yx}=\mu\left(\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\right),$$

donde $\Theta=\operatorname{div}U$, λ y μ son las constantes de Lamé relacionadas del modo siguiente con el módulo E de Young y el coeficiente m de Poisson:

$$E=\frac{\mu(3\lambda+2\mu)}{\lambda+\mu},\quad m=\frac{\lambda}{2(\lambda+\mu)}.$$

El coeficiente m de Poisson caracteriza la razón de la contracción transversal correspondiente y el alargamiento longitudinal. El módulo del desplazamiento

$$G=\mu.$$

13. Representando el vector de las fuerzas volumétricas en la forma $F=\operatorname{grad}\Phi+\operatorname{rot}B$ (acerca de la posibilidad de representación en esta forma de un vector arbitrario véase [14], pág. 209), demostrar que si $\rho\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}=(\lambda+2\mu)\Delta\varphi+\Phi$, $\rho\frac{\partial^2 A}{\partial t^2}=\mu\Delta A+B$, entonces el vector $U=\operatorname{grad}\varphi+\operatorname{rot}A$ satisface las ecuaciones del movimiento obtenidas en el problema 12.

14. Se llama plano el problema sobre la propagación de las perturbaciones en un medio elástico, si la componente w del vector del desplazamiento U y la componente Z del vector de la densidad de las fuerzas volumétricas $F=iX+jY+kZ$, son iguales a cero y las magnitudes restantes no dependen de z. Por ejemplo, el problema sobre la propagación de la deformación en una placa delgada causada por las fuerzas que actúan en su plano es un problema plano*).

Demostrar que en el caso del problema plano el vector del desplazamiento U se expresa por medio de dos potenciales escalares, cada uno de los cuales satisface la ecuación ondulatoria correspondiente.

---

*) Para más detalles véase [26], pág. 92.

15. Expresar por medio de las componentes del vector U y el tensor T (véase el problema 12) las condiciones de frontera para la propagación de las perturbaciones elásticas en un semiespacio isotrópico y homogéneo, si el plano de la frontera

a) está libre,

b) está fijo rígidamente.

Expresar para el problema plano estas condiciones de frontera por medio de los potenciales escalares (véase el problema 14).

16. Plantear el problema de contorno sobre las oscilaciones radiales del tubo cilíndrico circular bajo la acción de la fuerza radial $F(r, t)$, donde $F(r, t)$ es la fuerza que actúa sobre una unidad de masa que está a la distancia r del eje del tubo.

17. Plantear el problema de contorno sobre las vibraciones radiales de la capa esférica elástica $r_1 \leqslant r \leqslant r_2$ bajo la acción de la presión variable $p(t)$ dentro de la cavidad interior.

18. Deducir la ecuación diferencial para la desviación desde el estado no perturbado de los puntos de una placa homogénea isotrópica fina que efectúa oscilaciones transversales pequeñas. Examinar, en particular, el caso cuando la placa está puesta (y sujeta) sobre la base elástica.

Observación. El problema sobre las oscilaciones transversales de una placa es el análogo bidimensional del problema sobre las oscilaciones transversales de la barra (véase § 1, cap. II).

19. Pasando a las coordenadas polares, plantear el problema de contorno sobre las oscilaciones transversales de una placa circular si el borde de la placa está rígidamente apretado.

20. En el origen de las coordenadas del espacio no acotado x, y, z, que representa en sí el vacío, se encuentra el dipolo eléctrico paralelo al eje z. El momento del dipolo varía según la ley

$$M = \begin{cases} M_0 = \text{const}, & -\infty < t \leqslant 0, \\ M_1 = M_0 \cos \omega t, & 0 < t < +\infty. \end{cases}$$

Plantear el problema de contorno sobre la determinación del campo electromagnético generado por el dipolo para $t > 0$.

§ 2. Problemas sencillos; diferentes métodos de resolución

21. a) Resolver el problema de contorno

$$u_{tt} = a^2 \Delta u, \quad -\infty < x, y, z < +\infty, \quad 0 < t < +\infty, \qquad (1)$$

$$u|_{t=0} = \varphi(r), \quad u_t|_{t=0} = \psi(r), \quad r^2 = x^2 + y^2 + z^2, \quad 0 \leqslant r < +\infty. \qquad (2)$$

b) Hallar

$$\lim_{x, y, z \to 0} u(x, y, z, t).$$

22. Resolver el problema de contorno

$$u_{tt} = a^2 \Delta u + f(r, t), \quad r^2 = x^2 + y^2 + z^2,$$

$$0 \leqslant r < +\infty, \quad 0 < t < +\infty, \tag{1}$$

$$u|_{t=0} = 0, \quad u_t|_{t=0} = 0. \tag{2}$$

23. Resolver el problema de contorno

$$u_{tt} = a^2 \Delta u, \quad -\infty < x, y, z < +\infty, \quad 0 < t < +\infty \tag{1}$$

con las condiciones iniciales

a) $u|_{t=0} = \begin{cases} U_0 = \text{const dentro de la esfera de radio } r_0, \\ 0 \quad \text{fuera de esta esfera,} \end{cases}$

$u_t|_{t=0} = 0$ en todas partes.

b) $u_t|_{t=0} = \begin{cases} U_0 = \text{const dentro de la esfera de radio } r_0, \\ 0 \quad \text{fuera de esfera,} \end{cases}$

$u|_{t=0} = 0$ en todas partes.

24. En el momento inicial de tiempo $t = 0$ el gas dentro de un volumen esférico de radio r_0 está comprimido de tal modo que la perturbación de la densidad es $\tilde{\rho} = \tilde{\rho}_1$ y fuera del volumen $\tilde{\rho} \equiv 0$. La velocidad inicial de las partículas del gas es igual a cero en todo el espacio. Hallar el movimiento del gas para $t > 0$.

25. Resolver el problema 23 b) para el semiespacio $z \geqslant 0$ si el centro de la esfera se encuentra en el punto $(0, 0, z_0)$, $z_0 > r_0$; examinar los casos particulares cuando

a) $u|_{z=0} = 0$,

b) $u_z|_{z=0} = 0$.

26. Resolver el problema 23 b) para el ángulo diedro $y \geqslant 0$, $z \geqslant 0$ si el centro de la esfera está en el punto $(0, y_0, z_0)$, $y_0 > r_0$, $z_0 > r_0$; examinar los casos cuando

a) $u|_{y=0} = 0$, $u_z|_{z=0} = 0$,

b) $u_y|_{y=0} = 0$, $u|_{z=0} = 0$.

27. El espacio no acotado está lleno de un gas ideal en reposo. En el momento de tiempo $t = 0$, en un cierto punto fijo de este espacio empieza a actuar continuamente un manantial simétrico esférico de gas de potencia $q(t)$. Hallar el potencial de las velocidades de las partículas del gas para $t > 0$, suponiendo que las perturbaciones generadas por el manantial son pequeñas.

28. Resolver el problema anterior si el manantial se encuentra

a) dentro del ángulo diedro $\frac{\pi}{n}$, donde n es un número entero mayor que cero;

b) dentro de una capa plana $0 < z < l$, además, los planos de frontera son inmóviles.

29. De la solución del problema de contorno

$$u_{tt} = a^2 \Delta_3 u + f(x, y, z, t), \quad -\infty < x, y, z < +\infty, \quad 0 < t < < +\infty,$$

$$u|_{t=0} = \varphi(x, y, z), \; u_t|_{t=0} = \psi(x, y, z), \; -\infty < x, y, z < +\infty$$

mediante el método «de descenso»*) obtener la solución del problema de contorno

$$u^*_{tt} = a^2 \Delta_2 u^* + f^*(x, y, t), \; -\infty < x, \; y < +\infty, \; 0 < t < +\infty,$$

$$u^*|_{t=0} = \varphi^*(x, y), \quad u^*_t|_{t=0} = \psi^*(x, y), \quad -\infty < x, \; y < +\infty.$$

30. De la solución del problema de contorno

$$u_{tt} = a^2 \Delta_3 u \pm cu + f(x, y, z, t), \; -\infty < x, y, z < +\infty, \; 0 < t < +\infty,$$

$$u|_{t=0} = \varphi(x, y, z), \; u_t|_{t=0} = \psi(x, y, z), \; -\infty < x, y, z < +\infty$$

mediante el método «de descenso»*) obtener la solución del problema de contorno

$$u^*_{tt} = a^2 \Delta_2 u^* \pm c^2 u^* + f^*(x, y, t), \quad -\infty < x, \; y < +\infty, \; 0 < t < +\infty,$$

$$u^*|_{t=0} = \varphi^*(x, y), \quad u^*_t|_{t=0} = \psi^*(x, y), \quad -\infty < x, \; y < +\infty.$$

31. Sobre una recta fija en el espacio no acotado lleno de un gas ideal en reposo, están distribuidos continuamente los manantiales de gas que empiezan actuar en el momento $t = 0$, además, la potencia de los manantiales de una unidad de longitud de esta recta es igual a $q(t)$. Hallar el potencial de las velocidades de las partículas del gas para $t > 0$, suponiendo que las perturbaciones generadas por los manantiales en el gas ambiente son pequeñas (fuera del entorno infinitésimo de la recta sobre la que están los manantiales).

32. Resolver el problema anterior para el cuadrante $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$ acotado por los planos absolutamente duros $x = 0$, $y = 0$ si la recta en que están los manantiales es paralela al eje z y se define por las coordenadas x_0, y_0, $x_0 > 0$, $y_0 > 0$.

33. En el espacio no acotado lleno de un gas ideal en reposo se encuentra una capa esférica de radio r_0 con el centro en un punto fijo. Empezando desde el momento $t = 0$ el radio de la superficie

---

*) Véase [7], págs. 458-460.

esférica varía continuamente según la ley dada, además la velocidad radial de los puntos de la superficie es igual a $\mu(t)$. Hallar el movimiento en el caso cuando $\mu(t) = A \operatorname{sen} \omega t$.

34. Resolver el problema anterior si la esfera se encuentra en un semiespacio acotado por un plano inmóvil.

35. En el espacio no acotado lleno de un gas ideal en reposo se encuentra una esfera de radio fijo r_0. Desde el momento $t = 0$ el centro de la esfera efectúa oscilaciones pequeñas con velocidad $V(t)$; además, $|V(t)| \ll a$, donde a es la velocidad del sonido. Hallar el potencial de las velocidades de las partículas del gas.

36. Resolver el problema sobre el contorneado subsónico simétrico estacionario de una cuña por el flujo de un gas ideal. Hallar el potencial de las velocidades en la región perturbada y la perturbación de la presión sobre la cuña*).

37. Resolver el problema sobre el contorneado subsónico simétrico estacionario de un cono circular con el ángulo de abertura pequeño**).

38. La onda plana de propagación para la ecuación

$$u_{tt} = a^2 \Delta u + cu, \tag{1}$$

donde $\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \ldots + \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2}$, se llama la solución de la forma

$$u = f\left(\sum_{i=1}^{n} a_i x_i - bt\right). \tag{2}$$

La onda plana $u = f\left(\sum_{i=1}^{n} a_i x_i - bt\right)$ tiene un valor constante para cada plano de la familia

$$\sum_{i=1}^{n} a_i x_i - bt = \text{const}. \tag{3}$$

La distancia desde el plano (3) hasta el origen de las coordenadas $x_1 = 0,\ x_2 = 0,\ \ldots,\ x_n = 0$ es igual a

$$\frac{bt + \text{const}}{\left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right)^{1/2}}. \tag{4}$$

Con la variación de t el plano (3) se mueve con una velocidad

$$\frac{b}{\left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right)^{1/2}}, \tag{5}$$

---

*) Véase el problema 7.

**) Véase el problema 8.

quedando paralelo a su posición inicial (para $t=0$)

$$\sum_{i=1}^{n} a_i x_i = \text{const}; \tag{6}$$

en otras palabras, con la velocidad (5) él se aleja de su posición inicial (6). Para simplificar la exposición consideraremos en adelante que $\sum_{i=1}^{n} a_i^2 = 1$, es decir que a_i son los cosenos directores de la normal al plano (3); $Q = \sum_{i=1}^{n} a_i x_i - bt$ es la fase de la onda (2), y f, la forma de la onda.

Demostrar que:

1) para que existan las ondas planas de forma arbitraria que se propagan con la velocidad a en cualquier dirección es necesario y suficiente que $c = 0$;

2) cuando $c \neq 0$ para la ecuación (1) existen ondas planas de cualquier dirección de propagación y de cualquier velocidad, excepto la a, pero sus formas no pueden ser arbitrarias y son las soluciones de la ecuación diferencial

$$f''(Q)(a^2 - b^2) + f(Q)c = 0. \tag{7}$$

39. Resolver el problema sobre el contorneado estacionario de la pared ondulatoria $y = \varepsilon \operatorname{sen} \omega x$, donde ε es pequeño, $-\infty < x < +\infty$, por el flujo del gas comprensible ideal, cuya velocidad no perturbada coincide con la dirección del eje x y es igual a $U = \text{const}$. Examinar los casos:

a) de la velocidad subsónica del flujo,

b) de la velocidad supersónica del flujo.

40. Mediante la superposición de las ondas planas con el frente paralelo al eje z, $f(at - \alpha x - \beta y)$, donde α y β son los cosenos directores de la normal al frente de la onda, obtener las ondas cilíndricas

$$\psi(r, t) = \int_{at-r}^{at+r} \frac{f(\xi)\, d\xi}{\sqrt{r^2 - (at - \xi)^2}}, \tag{1}$$

donde $r = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Hallar la expresión explícita para $\psi(r, t)$ con la condición de que

$$f(\xi) = \begin{cases} 0 & \text{para} \quad -\infty < \xi < -r_0, \\ U_0 = \text{const} & \text{para} \quad -r_0 < \xi < r_0, \\ 0 & \text{para} \quad r_0 < \xi < +\infty. \end{cases}$$

41. Mediante la superposición de las ondas esféricamente simétricas $\frac{f_1(at - r)}{r}$ y $\frac{f_2(at + r)}{r}$, donde $f_1(\xi)$ y $f_2(\xi)$ son funciones arbi-

trarias, obtener las ondas cilíndricas

$$\psi_1(\rho, t) = \int_{-\infty}^{at-\rho} \frac{2f_1(\xi)\,d\xi}{\sqrt{(at-\xi)^2-\rho^2}}, \quad \psi_2(\rho, t) = \int_{at+\rho}^{+\infty} \frac{2f_2(\xi)\,d\xi}{\sqrt{(at-\xi)^2-\rho^2}},$$

$$\rho^2 = x^2 + y^2,$$

suponiendo que las integrales convergen.

42. Hallar las ondas monocromáticas cilíndricas simétricas en un espacio no acotado, resolviendo la ecuación $u_{tt} = a^2\,\Delta u$, y después obtener estas ondas mediante la superposición de las ondas monocromáticas planas.

43. Mediante la superposición de las ondas planas obtener la onda esférica de la forma

$$\frac{\Phi\left(t+\frac{r}{a}\right)-\Phi\left(t-\frac{r}{a}\right)}{r}.$$

44. Resolver el problema sobre la reflexión y la refracción de la onda monocromática plana sobre la frontera de separación de dos gases ideales diferentes; hallar la relación entre los ángulos de incidencia, de reflexión y de refracción y también entre las amplitudes de las ondas incidente, reflejada y refractada. Considerar iguales las presiones no perturbadas en los ambos gases.

45. Hallar la relación entre los ángulos de incidencia, de reflexión y de refracción de la onda electromagnética monocromática plana sobre la frontera plana de dos dieléctricos isotrópicos homogéneos.

46. Examinando el caso de la incidencia normal de la onda electromagnética linealmente polarizada monocromática plana sobre el plano de separación de dos dieléctricos isotrópicos homogéneos, hallar la relación entre las amplitudes de las ondas incidente, reflejada y refractada y dar las expresiones de las mismas.

§ 3. Método de separación de variables *)

1. Problemas de contorno que no requieren la utilización de las funciones especiales

En este punto se examinan también los problemas de contorno para las regiones con las fronteras planas y esféricas, cuyas soluciones se expresan mediante series según las funciones propias más simples (elementales) del operador de Laplace para estas regiones.

Inicialmente los medios se suponen isotrópicos y homogéneos, después se dan algunos problemas para los medios heterogéneos.

*) Véase la primera llamada en la pág. 32 del tomo I.

a) Medios homogéneos

47. Hallar las oscilaciones transversales de una membrana rectangular $0 \leqslant x \leqslant l_1$, $0 \leqslant y \leqslant l_2$ con el borde fijo causadas por la desviación inicial

$$u(x, y, 0) = Axy(l_1 - x)(l_2 - y),$$

si se puede despreciar la reacción del medio ambiente.

48. Hallar las oscilaciones transversales de una membrana rectangular $0 \leqslant x \leqslant l_1$, $0 \leqslant y \leqslant l_2$ con el borde fijo, causadas por la distribución inicial de velocidades

$$u_t(x, y, 0) = Axy(l_1 - x)(l_2 - y)$$

si se puede despreciar la reacción del medio ambiente.

49. Hallar las vibraciones transversales de una membrana rectangular $0 \leqslant x \leqslant l_1$, $0 \leqslant y \leqslant l_2$ con el borde fijo, causadas por el impulso transversal concentrado K comunicado a la membrana en el punto (x_0, y_0), $0 < x_0 < l_1$, $0 < y_0 < l_2$, considerando que la reacción del medio ambiente es despreciablemente pequeña.

50. Hallar las oscilaciones transversales de una membrana rectangular $0 \leqslant x \leqslant l_1$, $0 \leqslant y \leqslant l_2$ con borde fijo, causadas por la fuerza continuamente distribuida por la membrana y perpendicular a su plano con la densidad

$$F(x, y, t) = A(x, y) \operatorname{sen} \omega t, \quad 0 < t < +\infty,$$

considerando que la reacción del medio ambiente es despreciablemente pequeña.

51. Hallar las oscilaciones transversales de una membrana rectangular $0 \leqslant x \leqslant l_1$, $0 \leqslant y \leqslant l_2$ con borde fijo, causadas por la fuerza transversal concentrada

$$F(t) = A \operatorname{sen} \omega t, \quad A = \text{const}, \quad 0 < t < +\infty$$

aplicada en el punto (x_0, y_0), $0 < x_0 < l_1$, $0 < y_0 < l_2$, considerando que la reacción del medio ambiente es despreciablemente pequeña.

52. Hallar las oscilaciones del agua en un depósito rectangular $0 \leqslant x \leqslant l_1$, $0 \leqslant y \leqslant l_2$ bajo la acción de la presión exterior variable sobre la superficie libre

$$p_0(x, y, t) = A \cos \frac{\pi x}{l_1} \cos \frac{\pi y}{l_2} f(t), \quad 0 < t < +\infty, \quad f(0) = 0$$

si la profundidad del agua en el estado no perturbado es igual a h. Se supone que la función $f(t)$ tiene derivada continua*).

53. Resolver el problema 49, suponiendo que el medio ambiente ejerce una resistencia proporcional a la velocidad.

---

*) Véanse los problemas 9 y 10.

54. Hallar las oscilaciones establecidas de la membrana rectangular $0 \leqslant x \leqslant l_1$, $0 \leqslant y \leqslant l_2$ en un medio con resistencia proporcional a la velocidad, bajo la acción de una fuerza transversal continuamente distribuida con densidad

$$F = A \operatorname{sen} \omega t, \quad 0 < t < +\infty, \quad A = \text{const.}$$

El borde de la membrana es inmóvil.

55. Un gas ideal está encerrado entre dos esferas concéntricas S_{r_1} y S_{r_2}. El radio de la esfera interior S_{r_1} varía según la ley

$$r(t) = r_1 + \varepsilon \operatorname{sen} \omega t, \quad -\infty < t < +\infty, \quad 0 < \varepsilon \ll r_2 - r_1$$

y la esfera exterior permanece invariable. Hallar las oscilaciones establecidas del gas entre las esferas.

56. Un gas ideal está encerrado entre dos esferas concéntricas S_{r_1} y S_{r_2} con los radios fijos r_1 y r_2. Hallar las oscilaciones del gas entre las esferas causadas por la perturbación radial inicial de la densidad

$$\tilde{\rho}(r, 0) = f(r), \quad r_1 < r < r_2.$$

b) Medios heterogéneos

57. Hallar las oscilaciones transversales de una membrana rectangular $0 \leqslant x \leqslant l_1$, $0 \leqslant y \leqslant l_2$ compuesta de dos trozos rectangulares homogéneos $0 \leqslant x \leqslant x_0$, $0 \leqslant y \leqslant l_2$ y $x_0 \leqslant x \leqslant l_1$, $0 \leqslant y \leqslant l_2$, causadas por las perturbaciones transversales iniciales.

58. Una cavidad esférica de radio fijo r_2 está llena con dos gases ideales diferentes; la superficie de separación de los mismos es la esfera S_{r_1} $(0 < r_1 < r_2)$ concéntrica a la superficie de la cavidad.

Hallar las oscilaciones de los gases en las condiciones iniciales siguientes para el potencial de las velocidades $u(r, t)$ y la presión $p(r, t)$:

$$u(r, 0) = f(r), \quad p(r, 0) = p_0, \quad 0 \leqslant r < r_2.$$

2. Problemas de contorno que requieren la utilización de las funciones especiales

Al igual que en el punto anterior, primero van los problemas para los medios homogéneos y después para los medios heterogéneos.

a) Medios homogéneos

59. Hallar las oscilaciones transversales de una membrana circular con borde fijo, causadas por la distribución inicial radialmente simétrica de las desviaciones y de las velocidades, considerando que la reacción del medio ambiente es despreciablemente pequeña.

60. Resolver el problema anterior, suponiendo que la desviación inicial tiene la forma de un paraboloide de rotación y que las velocidades iniciales son iguales a cero.

61. Hallar las oscilaciones (ondas) del agua en un recipiente cilíndrico vertical con el fondo horizontal si las condiciones iniciales poseen simetría radial y la presión sobre la superficie libre del agua queda constante.

62. Hallar las oscilaciones de una membrana circular con el borde fijo en un medio sin resistencia, causadas por la presión constante uniformemente distribuida que actúa sobre una parte de la membrana desde el momento $t = 0$, suponiendo que el medio ambiente no ejerce ninguna otra resistencia a las oscilaciones de la membrana.

63. Hallar las oscilaciones de una membrana circular $0 \leqslant r \leqslant r_0$ con el borde fijo en un medio sin resistencia, causadas por la presión variable

$$p = f(r, t), \quad 0 \leqslant r \leqslant r_0, \quad 0 < t < +\infty$$

aplicada en un lado de la membrana.

64. Hallar las oscilaciones de una membrana circular $0 \leqslant r \leqslant r_0$ con borde fijo en un medio sin resistencia, causadas por la presión continuamente distribuida

$$p = p_0 \operatorname{sen} \omega t, \quad 0 < t < +\infty$$

aplicada en un lado de la membrana.

65. Hallar con las condiciones iniciales nulas las oscilaciones de una membrana circular $0 \leqslant r \leqslant r_0$ en un medio sin resistencia causadas por el movimiento de su borde según la ley

$$u(r_0 t) = A \operatorname{sen} \omega t, \quad 0 < t < +\infty.$$

66. Resolver el problema 59 en el caso cuando el medio ambiente ejerce una resistencia proporcional a la velocidad.

67. Hallar las oscilaciones establecidas de una membrana circular con el borde fijo en un medio con resistencia proporcional a la velocidad, bajo la acción de la presión uniformemente distribuida (aplicada a una parte de la membrana)

a) $p = p_0 \operatorname{sen} \omega t$, $0 < t < +\infty$, $p_0 = \text{const}$,

b) $p = p_0 \cos \omega t$, $0 < t < +\infty$, $p_0 = \text{const}$.

68. Hallar las oscilaciones establecidas de una membrana circular $0 \leqslant r \leqslant r_0$ en un medio con resistencia proporcional a la velocidad, causadas por el movimiento de su borde según la ley $u(r_0, t) = A \operatorname{sen} \omega t$ (compárase con el problema 65).

69. Hallar las oscilaciones de una membrana circular del tambor*) causadas por las perturbaciones iniciales radialmente simétricas.

---

*) Véase el problema 5.

70. Hallar las oscillaciones de una membrana circular del tambor causadas por la presión continuamente distribuida

$$p = \Pi_0 \text{ sen } \omega t; \quad 0 < t < +\infty, \quad \Pi_0 = \text{const},$$

aplicada a la parte exterior de la membrana.

71. Hallar las oscilaciones transversales de una placa circular con el borde fijo rígidamente en un medio sin resistencia, causadas por las perturbaciones iniciales radialmente simétricas.

72. Hallar las oscilaciones transversales de la placa del problema anterior causadas por un golpe concentrado transversal en el centro de la placa que le comunicó el impulso I.

73. Hallar las oscilaciones transversales de la placa del problema 71 causadas por una fuerza transversal uniformemente distribuida con densidad $p = p_0$ sen ωt aplicada desde el momento $t = 0$.

74. Hallar las oscilaciones transversales de la placa del problema 71 causadas por una fuerza transversal concentrada $P = P_0$ sen ωt aplicada en el centro de la placa desde el momento $t = 0$ (las oscilaciones de la membrana del altavoz).

75. Hallar las oscilaciones transversales de una membrana que tiene la forma de anillo circular con los bordes fijos, generadas por perturbaciones iniciales radialmente simétricas.

76. Hallar las vibraciones transversales de la membrana descripta en el problema anterior generadas por una presión uniformemente distribuida

$$p = p_0 \text{ sen } \omega t, \quad 0 < t < +\infty, \quad p_0 = \text{const},$$

aplicada a una parte de la membrana.

77. Hallar las oscilaciones del líquido en un recipiente con fondo horizontal, cuyas paredes son dos cilindros circulares coaxiales, si la profundidad del líquido en el estado no perturbado es igual a h = const y las perturbaciones iniciales son radialmente simétricas*).

78. Hallar las oscilaciones de un gas (el potencial de las velocidades) en un recipiente cilíndrico circular cerrado, generadas por las oscilaciones radiales de la pared lateral que comienzan en el momento $t = 0$ si las velocidades de las partículas de las paredes son iguales a

$$f(z) \cos \omega t, \; 0 \leqslant z \leqslant l \; (l \text{ es la longitud del cilindro}), \; 0 < t < +\infty.$$

Los fondos superior e inferior son inmóviles.

79. Hallar las oscilaciones de un gas en un cilindro circular cerrado generadas por las oscilaciones transversales de uno de sus fondos que comienzan en el momento $t=0$, si las velocidades de las

---

*) Véase el problema 9.

partículas de este fondo son iguales a

$f(z)\cos\omega t$, $0 \leqslant r \leqslant r_0$ (r_0 es el radio del cilindro), $0 < t < +\infty$.

El segundo fondo y la superficie lateral del recipiente son inmóviles.

80. Hallar las oscilaciones de un gas en un recipiente cerrado, formado por dos cilindros circulares coaxiales y dos fondos planos transversales generadas por las vibraciones radiales del cilindro exterior que comienzan en el momento $t = 0$ si las velocidades de las partículas de este cilindro son iguales a $f(z)\cos\omega t$, $0 \leqslant z \leqslant l$, l es la longitud del cilindro. Los fondos y el cilindro interior son inmóviles.

81. Hallar las oscilaciones de un gas en el recipiente descripto en el problema anterior generadas por las oscilaciones transversales de uno de los fondos que empezaron en el momento $t = 0$ si las velocidades de las partículas de este fondo son iguales a $f(r)\cos\omega t$, $r^* \leqslant r \leqslant r^{**}$, r^* y r^{**} son los radios de los cilindros interior y exterior. El segundo fondo y los cilindros son inmóviles.

82. Hallar las oscilaciones transversales de una membrana circular $0 \leqslant r \leqslant r_0$ con el borde fijo, generados por un golpe concentrado normal a la superficie de la membrana que le comunicó en el punto (r_1, φ_1), $0 < r_1 < r_0$, el impulso K.

Contemplar el caso cuando el medio ambiente no ejerce resistencia al movimiento de la membrana.

83. Un recipiente con agua que representa en sí un cilindro circular vertical con el fondo horizontal durante largo tiempo se mueve con velocidad $v_0 = \text{const}$ en dirección perpendicular al eje del recipiente.

Hallar las oscilaciones del agua en el recipiente para $t > 0$ si en el momento $t = 0$ el recipiente instantáneamente se detiene y si para $t < 0$ el agua permanecía inmóvil con respecto al recipiente. Considerar constante la presión sobre la superficie libre del agua.

84. Hallar las oscilaciones de una membrana circular $0 \leqslant r \leqslant r_0$ con el borde fijo, generadas por la presión variable continuamente distribuida

$$p = f(r)\cos(\varphi - \omega t), \quad f(r_0) = 0, \quad 0 < t < +\infty,$$

aplicada a una parte de la membrana.

85. Hallar las oscilaciones establecidas de la membrana descripta en el problema anterior en un medio con resistencia proporcional a la velocidad.

86. Hallar las oscilaciones de una membrana circular $0 \leqslant r \leqslant r_0$ generadas por las oscilaciones de su borde según la ley

$$u(r_0, \varphi, t) = f(t)\cos n\varphi, \quad f(0) = f'(0) = 0, \quad n \text{ es número entero mayor que } 0, \quad 0 < t < +\infty.$$

87. Hallar las oscilaciones de una membrana circular $0 \leqslant r \leqslant r_0$ generadas por las oscilaciones de su borde según la ley $u(r_0, \varphi, t) = F(\varphi) \operatorname{sen} \omega t$, $F(\varphi)$ es una función suave con período 2π.

88. Hallar las vibraciones de un gas en un cilindro circular cerrado $0 \leqslant r \leqslant r_0$, $0 \leqslant z \leqslant l$, generadas por las vibraciones radiales de su pared lateral con la velocidad que varía según la ley $f(z) \cos n\varphi \cos \omega t$, n es número entero mayor que 0,

$$0 < t < +\infty.$$

Los fondos del recipiente son inmóviles.

89. Hallar las oscilaciones de un gas en un cilindro circular cerrado $0 \leqslant r \leqslant r_0$, $0 \leqslant z \leqslant l$, generadas por las oscilaciones transversales de uno de sus fondos con velocidad que varía según la ley $f(r) \cos n\varphi \cos \omega t$, n es un número entero mayor que 0, $0 < t < < +\infty$.

90. Hallar las vibraciones transversales de una membrana con el borde fijo, generadas por el impulso inicial concentrado transversal K comunicado a la membrana en cierto punto interior, si la membrana tiene la forma de un sector circular y el medio ambiente no ocasiona resistencia a las oscilaciones.

91. Resolver el problema anterior para la membrana que tiene la forma de un sector del anillo circular.

92. Hallar las vibraciones de un gas en la región acotada por dos cilindros circulares coaxiales inmóviles, dos planos perpendiculares al eje de los cilindros y dos planos que pasan por su eje si estas oscilaciones son generadas por las perturbaciones iniciales que no dependen de z.

93. Un recipiente esférico con un gas durante largo tiempo se mueve uniformemente con velocidad v y después en el momento $t = 0$ instantáneamente se detuvo y quedó inmóvil. Hallar las vibraciones del gas en el recipiente, surgidas como resultado de esto.

94. Un recipiente esférico lleno de un gas, a partir del momento $t = 0$ realiza oscilaciones armónicas pequeñas en la dirección de uno de sus diámetros; el desplazamiento del recipiente en la dirección de diámetro es igual a $A \operatorname{sen} \omega t$, $0 < t < +\infty$. Hallar las oscilaciones del gas en el recipiente suponiendo que para $t < 0$ el gas estaba en reposo.

95. Hallar las oscilaciones de un gas en el recipiente esférico $0 \leqslant r \leqslant r_0$, $0 \leqslant \theta \leqslant \pi$, $0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$, generadas por las deformaciones pequeñas de la pared del recipiente que comenzaron en el momento $t = 0$, si las velocidades de las partículas de la pared del recipiente están dirigidas según sus radios y la magnitud de las velocidades es igual a

$$AP_n(\cos \theta) \cos \omega t^{*}).$$

---

*) $P_n(\xi)$ es el polinomio de Legendre.

96. Hallar las oscilaciones de un gas en un recipiente esférico generadas por las vibraciones pequeñas de su pared que comenzaron en el momento $t = 0$, si las velocidades de las partículas de la pared del recipiente están dirigidas según sus radios y la magnitud de las velocidades es igual a

$$P_n(\cos\theta) f(t),$$

donde $f(0) = f'(0) = 0$.

97. Hallar las oscilaciones de un gas en un recipiente esférico generadas por las oscilaciones pequeñas de su pared que comenzaron en el momento $t = 0$, si las velocidades de las partículas de la pared del recipiente están dirigidas según sus radios y la magnitud de las velocidades es igual a

$$f(\theta)\cos\omega t, \quad 0 < t < +\infty.$$

98. Resolver el problema anterior con la condición que las velocidades de las partículas de la pared sean iguales a

$$AP_n^m(\cos\theta)\cos m\varphi\cos\omega t^{*)}.$$

99. Resolver el problema 97 si las velocidades de las partículas de la pared son iguales a

$$f(\theta)\cos m\varphi\cos\omega t.$$

100. Resolver el problema 97 si las velocidades de las partículas de la pared son iguales a

$$f(t)\, P_n^m(\cos\theta)\cos m\varphi, \quad f(0) = f'(0) = 0.$$

101. Resolver el problema 93 para un gas encerrado entre dos esferas concéntricas S_{r_1} y S_{r_2}, $r_1 < r_2$.

102. Resolver el problema 94 para un gas encerrado entre dos esferas concéntricas S_{r_1} y S_{r_2}, $r_1 < r_2$.

b) Medios heterogéneos

103. Hallar las vibraciones transversales de una membrana circular heterogénea $0 \leqslant r \leqslant r_2$ con el borde fijo, obtenida mediante la unión de una membrana circular homogénea $0 \leqslant r \leqslant r_1$ y una membrana homogénea de forma de anillo $r_1 \leqslant r \leqslant r_2$, si las perturbaciones iniciales son dadas.

§ 4. Método de las representaciones integrales

En el primer apartado de este párrafo se han reunido los problemas sobre la utilización de la integral de Fourier; en el segundo, sobre la construcción y empleo de las funciones de influencia de los manantiales concentrados instantáneos.

---

*) $P_n^m(\xi)$ es la función asociada de Legendre, $m \leqslant n$.

1. Utilización de la integral de Fourier

a) Transformación de Fourier

104. Resolver el problema de contorno

$$u_{tt} = a^2 \Delta_2 u, \quad -\infty < x,\ y < +\infty, \quad 0 < t < +\infty^{*}), \qquad (1)$$

$$u|_{t=0} = \Phi(x, y), \quad u_t|_{t=0} = \Psi(x, y), \quad -\infty < x,\ y < +\infty. \quad (2)$$

105. Resolver el problema de contorno

$$u_{tt} = a^2 \Delta_3 u, \quad -\infty < x,\ y,\ z < +\infty, \quad 0 < t < +\infty^{**}), \quad (1)$$

$$u|_{t=0} = \Phi(x, y, z), \quad u_t|_{t=0} = \Psi(x, y, z),$$
$$-\infty < x,\ y,\ z < +\infty. \qquad (2)$$

106. Resolver el problema de contorno

$$u_{tt} = a^2 \Delta_2 u + f(x, y, t), \ -\infty < x, y < +\infty, \ 0 < t < +\infty, \quad (1)$$

$$u|_{t=0} = 0, \quad u_t|_{t=0} = 0, \quad -\infty < x,\ y < +\infty. \qquad (2)$$

107. Resolver el problema de contorno

$$u_{tt} = a^2 \Delta_3 u + f(x, y, z, t), \quad -\infty < x, y, z < +\infty,$$
$$0 < t < +\infty, \qquad (1)$$

$$u|_{t=0} = 0, \quad u_t|_{t=0} = 0, \quad -\infty < x, y, z < +\infty. \qquad (2)$$

108. Resolver el problema de contorno

$$u_{tt} = b^2 \Delta_2 \Delta_2 u = 0, \ -\infty < x, y < +\infty, \ 0 < t < +\infty^{***}), \quad (1)$$

$$u|_{t=0} = \Phi(x, y), \quad u_t|_{t=0} = \Psi(x, y), \quad -\infty < x,\ y < +\infty. \quad (2)$$

b) Transformación de Fourier — Bessel — Hankel

109. Utilizando la transformación de Fourier — Bessel, resolver el problema de contorno

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} \right), \quad 0 \leqslant r < +\infty, \quad 0 < t < +\infty, \qquad (1)$$

$$u(r, 0) = \frac{A}{\sqrt{1 + \frac{r^2}{b^2}}}, \quad u_t(r, 0) = 0, \quad 0 \leqslant r < +\infty. \qquad (2)$$

---

*) Δ_2 = div grad es el operador de Laplace para el plano; en las coordenadas cartesianas $\Delta_2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$.

**) Δ_3 = div grad es el operador de Laplace para el espacio; en las coordenadas cartesianas $\Delta_3 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$.

***) El operador biarmónico $\Delta_2 \Delta_2$ que significa la utilización doble del operador de Laplace Δ_2.

110. Hallar las oscilaciones transversales radialmente simétricas de una placa no acotada, resolviendo el problema de contorno

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}+b^2\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\;\frac{\partial}{\partial r}\right)^2 u=0,\quad 0\leqslant r<+\infty,\quad 0<t<+\infty, \qquad (1)$$

$$u(r,\,0)=f(r),\quad u_t(r,\,0)=0,\quad 0\leqslant r<+\infty. \qquad (2)$$

Examinar, en particular, el caso cuando

$$f(r)=Ae^{-\frac{r^2}{a^2}},\quad 0\leqslant r<+\infty. \qquad (2')$$

111. Hallar las desviaciones transversales radialmente simétricas de los puntos de una placa no acotada $0\leqslant r<+\infty$, si el punto $r=0$ de esta placa desde el momento $t=0$ se mueve según una ley dada. Examinar, en particular, el caso cuando

$$u(0,\,t)=\begin{cases} A(t_0-t), & 0\leqslant t\leqslant t_0,\\ 0, & t_0\leqslant t<+\infty.\end{cases} \qquad (1)$$

112. Hallar las desviaciones puramente impulsantes, transversales, radialmente simétricas de los puntos de una placa no acotada $0\leqslant r<+\infty$ bajo la acción de unas fuerzas transversales distribuidas con la densidad

$$p(r,\,t)=16\rho hbf(r)\,\psi'(t),\quad -\infty<t<+\infty,$$

donde $2h$ es el espesor de la placa; ρ, la densidad de la masa de la placa; b tiene el mismo significado que en los problemas anteriores*); $\psi'(t)=\frac{d\psi(t)}{dt}$; $\psi(t)$ depende sólo de t y $f(r)$ de r.

Examinar, en particular, los casos cuando:

a) el movimiento de la placa se impulsa por la fuerza transversal concentrada

$$16\rho hb\psi'(t),\quad -\infty<t<+\infty,$$

aplicada en el punto $r=0$;

b) el movimiento de la placa se impulsa por la fuerza transversal

$$16\rho hb\psi'(t),\quad -\infty<t<+\infty,$$

uniformemente distribuida sobre el círculo $0\leqslant r\leqslant a$;

c) la fuerza descripta en el apartado b) actúa durante el tiempo t_0, a saber

$$\psi'(t)=\begin{cases} 0 & \text{para}\quad -\infty<t\leqslant 0,\\ \psi_0=\text{const} & \text{para}\quad 0<t<t_0,\\ 0 & \text{para}\quad t_0<t<+\infty,\end{cases}$$

*) Para más detalles véase el problema 18.

dar las fórmulas asintóticas para la representación de la solución para las magnitudes pequeñas y grandes de r;

d) $p(r, t) = \frac{4A\rho h}{c^2} e^{-\frac{r^2}{c^2}} f'(t) \quad -\infty < t < +\infty$;

e) hallar las velocidades transversales de los puntos de una placa para

$$p(r, t) = \frac{4A\rho h}{c^2} e^{-\frac{r^2}{c^2}} \delta(t), \quad -\infty < t < +\infty,$$

donde $\delta(t)$ es la función δ impulsiva $\Big($es decir, en el momento $t = 0$ la placa recibe un golpe transversal con el impulso, continuamente distribuido, $\frac{4A\rho h}{c^2} e^{-\frac{r^2}{c^2}}\Big)$.

2. Construcción y utilización de las funciones de influencia de los manantiales concentrados

a) Funciones de influencia de los impulsos instantáneos concentrados

113. Construir la función de influencia del impulso instantáneo concentrado de potencia unitaria para la ecuación

$$u_{tt} = a^2 \Delta_3 u$$

en el espacio no acotado x, y, z, considerando al principio que el impulso tiene lugar en el origen de coordenadas en el momento $t = 0$; hallar la función de influencia, resolviendo el problema de contorno

$$u_{tt} = a^2 \Delta_3 u, \quad -\infty < x,\ y,\ z < +\infty, \quad 0 < t < +\infty, \qquad (1)$$

$$u|_{t=0} = 0, \quad u_t|_{t=0} = \delta(x)\,\delta(y)\,\delta(z), \quad -\infty < x, y, z < +\infty, \quad (2)$$

después pasar al caso cuando el impulso tiene lugar en el punto (ξ, η, ζ) en el momento $t = \tau$.

114. Resolver el problema anterior para la ecuación

$$u_{tt} = a^2 \Delta_3 u \pm c^2 u.$$

115. Resolver el análogo bidimensional del problema 113.

116. Resolver el análogo bidimensional del problema 114.

117. Mediante la separación de variables construir la función de influencia para un impulso instantáneo concentrado para el primero, segundo y tercer problemas de contorno para la ecuación $u_{tt} = a^2 \Delta_2 u$:

a) para la membrana rectangular $0 \leqslant x \leqslant l_1$, $0 \leqslant y \leqslant l_2$,

b) para la membrana circular $0 \leqslant r \leqslant r_0$, $0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$.

118. Mediante el método de reflexión construir la función de influencia de un impulso instantáneo concentrado para la ecuación $u_{tt} = a^2 \Delta_2 u \pm c^2 u$ con ángulo $0 \leqslant \varphi \leqslant \frac{\pi}{n}$, donde n es un número entero mayor que cero, si sobre los rayos de frontera $\varphi = 0$ y $\varphi = \frac{\pi}{n}$ se cumple la condición de frontera de segundo género.

119. Sea G una región plana acotada por el contorno Γ suave a trozos. Suponiendo posible la utilización de la fórmula de Green — Ostrogradski que relaciona la integral curvilínea con la integral doble, hallar la solución a) del primero, b) del segundo y c) del tercer problema de contorno para la ecuación $u_{tt} = a^2 \Delta_2 u \pm c^2 u + f(x, y, t)$ con las condiciones iniciales y de frontera heterogéneas, si se conoce la función de influencia del impulso instantáneo concentrado para cada uno de los casos enunciados.

120. Mediante la función de influencia del impulso instantáneo concentrado hallada en la solución del problema 113, deducir la fórmula de Kirchhoff*) para la ecuación

$$u_{tt} = a^2 \Delta_3 u + f(x, y, z, t).$$

b) Funciones de influencia de los manantiales concentrados de funcionamiento continuo

121. Construir la función de influencia del manantial concentrado de funcionamiento continuo de potencia variable $f(t)$ ($f(t) = 0$ para $t < 0$) que se encuentra en un punto fijo del espacio para la ecuación $u_{tt} = a^2 \Delta_3 u$, es decir, resolver el problema de contorno

$$u_{tt} = a^2 \Delta_3 u + \delta(x - x_0)\, \delta(y - y_0)\, \delta(z - z_0)\, f(t),$$
$$-\infty < x, y, z < +\infty, \quad 0 < t < +\infty, \tag{1}$$
$$u|_{t=0} = u_t|_{t=0} = 0. \tag{2}$$

122. Construir la función de influencia del manantial concentrado de funcionamiento continuo de potencia variable $f(t)$ ($f(t) = 0$ para $t < 0$) que se encuentra en un punto fijo del espacio para la ecuación $u_{tt} = a^2 \Delta_2 u$, es decir, resolver el problema de contorno

$$u_{tt} = a^2 \Delta_2 u + \delta(x - x_0)\, \delta(y - y_0)\, f(t),$$
$$-\infty < x, y < +\infty, \quad 0 < t < +\infty, \tag{1}$$
$$u|_{t=0} = 0, \quad u_t|_{t=0} = 0. \tag{2}$$

123. Construir la función de influencia del manantial concentrado de funcionamiento continuo de potencia variable $f(t)$ ($f(t) = 0$ para

*) Véase [7], págs. 464-468.

$t < 0$) que se mueve según una ley arbitraria para la ecuación $u_{tt} = a^2 \Delta_3 u$, es decir, resolver el problema de contorno

$$u_{tt} = a^2 \Delta_3 u + \delta(x - X(t))\, \delta(y - Y(t))\, \delta(z - Z(t))\, f(t),$$
$$-\infty < x,\ y,\ z < +\infty, \quad 0 < t < +\infty, \tag{1}$$
$$u\,|_{t=0} = u_t\,|_{t=0} = 0, \tag{2}$$

donde $X(t)$, $Y(t)$, $Z(t)$ son las coordenadas del manantial; $X(0) = Y(0) = Z(0) = 0$. En particular, hallar la función de influencia del manantial concentrado que se mueve rectilíneamente con la velocidad constante v; examinar los casos cuando a) $v < a$, b) $v > a$.

124. Tomando en consideración que si el manantial posee la potencia constante q y se mueve rectilíneamente con la velocidad constante v, entonces en el sistema de coordenadas que se mueve junto con el manantial, el proceso será estacionario; hallar la función de influencia de tal manantial: a) para $v < a$, b) para $v > a$, omitiendo los términos con las derivadas con respecto al tiempo en la ecuación de las oscilaciones, transformada en este sistema móvil de coordenadas.

125. Hallar el campo electromagnético generado por un electrón que se mueve rectilíneamente en un dieléctrico con una velocidad constante mayor a la de la luz en este dieléctrico (el electrón de Cherenkov).

126. Resolver el problema de contorno 20.

127. Hallar las oscilaciones de un medio homogéneo, isotrópico y elástico, que llenan todo el espacio no acotado, y generadas por la fuerza de funcionamiento continuo $F(t)$ ($F(t) = 0$ para $t < 0$), aplicada a cierto punto del medio y paralela a una dirección fija.

Capítulo VII

ECUACIONES DE TIPO ELÍPTICO $\Delta u + cu = -f$

§ 1. Problemas para la ecuación $\Delta u - \varkappa^2 u = -f$

En este parágrafo examinaremos algunos problemas para la ecuación de tipo elíptico

$$\Delta u - \varkappa^2 u = 0, \quad (\varkappa^2 > 0), \tag{1}$$

a que conducen, por ejemplo, los problemas sobre la difusión de un gas inestable que se desintegra en el proceso de difusión.

La ecuación (1) tiene las soluciones fundamentales:

a) $u_0(M) = \frac{e^{-\varkappa r}}{r}$ en el espacio tridimensional,

b) $u_0(M) = K_0(\varkappa r)$ sobre el plano

(r es la distancia entre el punto M y el origen de las coordenadas). La función $K_0(x)$, como es sabido, tiene una singularidad logarítmica para $x = 0$ y decrece exponencialmente en el infinito.

El método de separación de variables al resolver la ecuación (1) frecuentemente conduce a la ecuación de Bessel para el argumento imaginario

$$y'' + \frac{1}{x} y' - \left(1 + \frac{\nu^2}{x^2}\right) y = 0,$$

la solución general tiene la forma

$$y = AI_\nu(x) + BK_\nu(x),$$

donde $I_\nu(x)$ y $K_\nu(x)$ son funciones cilíndricas de primero y segundo géneros de argumento imaginario. La función $I_\nu(x)$ es acotada cuando $x = 0$ y crece exponencialmente cuando $x \to \infty$.

1. Determinar la distribución estacionaria de la concentración de un gas inestable en un espacio no acotado, generada por un manantial puntiforme de gas de potencia Q_0.

2. Un manantial puntiforme de un gas inestable está situado a la altura ζ por arriba del plano $z = 0$, estanco al gas. Hallar la distribución estacionaria de la concentración.

3. Construir la función del manantial puntiforme para la ecuación $\Delta u - \varkappa^2 u = 0$ sobre el plano y dar su interpretación física.

4. Resolver el problema 3, suponiendo que el plano $y = 0$ es estanco al gas.

5. Construir la función de manantial para la ecuación de la difusión de un gas inestable, si el manantial se encuentra dentro de la capa $(0 \leqslant z \leqslant l)$ acotada por los planos $z = 0$ y $z = l$ estancos al gas.

6. Resolver el problema análogo al 5 para el caso bidimensional.

7. Un manantial puntiforme de un gas inestable está colocado dentro de un tubo cilíndrico infinito con las paredes estancas al gas. Determinar la distribución estacionaria de la concentración del gas, considerando que la sección del tubo puede tener una forma arbitraria.

8. Construir la función del manantial para la ecuación $\Delta u - \varkappa^2 u = 0$ dentro de la esfera, con las condiciones de frontera de segundo género.

9. Un manantial puntiforme de un gas funciona en un medio no acotado que se mueve con una velocidad constante v_0. Hallar la distribución estacionaria de la concentración del gas.

10. Hallar la distribución estacionaria de la concentración de un gas inestable dentro de un cilindro infinito de sección circular, si sobre la superficie del cilindro se mantiene la concentración constante $u|_\Sigma = u_0$.

11. Resolver el problema 10 para la región exterior al cilindro.

12. Resolver el problema 10 dentro de la esfera de radio a si

a) $u|_{r=a} = u_0$,

b) $u|_{r=a} = u_0 \cos \theta$.

13. Resolver el problema 12 para la región exterior a la esfera de radio a.

14. A una profundidad h debajo de la superficie terrestre se encuentra un medio en el que está distribuida con la densidad constante una sustancia radiactiva. Hallar

a) la distribución de la emanación dentro de la tierra,

b) la magnitud del flujo de la emanación a través de la superficie terreste, considerando que su concentración sobre la superficie terreste es igual a cero.

15. A una profundidad h debajo de la superficie terreste en cierto volumen está concentrada una sustancia radiactiva que desprende en una unidad de tiempo cierta cantidad de emanación (de un gas inestable) igual a Q_0. Hallar:

a) la distribución de la concentración de la emanación dentro de la tierra,

b) la magnitud del flujo de emanación a través de la superficie terreste, considerando que el manantial de emanación es puntiforme y su concentración sobre la superficie terreste es igual a cero.

16. Resolver el problema recíproco al problema 15. Siendo conocida la distribución del flujo a través de la superficie terreste $q = q(\rho)$; se debe hallar:

a) la potencia del manantial Q_0,

b) la posición del manantial, es decir, la profundidad de la estratificación h de la sustancia radiactiva.

§ 2. Algunos problemas sobre las oscilaciones propias

Los problemas sobre las oscilaciones propias de membranas y de volúmenes acotados, como es sabido, conducen a la ecuación homogénea $L(v) + \lambda\rho v = 0$, $L(v) = \text{div}(k \text{ grad } v)$ $(k(x) > 0, \rho(x) > 0)$ dentro de cierta región T con condiciones homogéneas en su frontera. En el cap. II y después en el cap. V, en la medida necesaria se examinaron algunos problemas sobre las oscilaciones propias de la cuerda y de la membrana. En este parágrafo se brinda una lista más completa de problemas sobre los valores propios, que pueden resolverse mediante el método de separación de variables.

La expresión «hallar las oscilaciones propias» en el futuro significará que se deben encontrar los valores propios y las funciones propias normadas para la región examinada.

1. Oscilaciones propias de cuerdas y membranas

17. Resolver el problema sobre las oscilaciones transversales propias de una cuerda homogénea $0 \leqslant x \leqslant l$ si:

a) los extremos de la cuerda están fijos rígidamente,

b) los extremos de la cuerda están libres*),

c) un extremo de la cuerda está libre y el otro, fijo,

d) los extremos de la cuerda están fijos elásticamente,

e) un extremo de la cuerta está fijo rígidamente y el otro, elásticamente,

f) un extremo de la cuerda está fijo elásticamente y el otro está libre.

18. Hallar las oscilaciones longitudinales propias de una barra de longitud l compuesta de dos barras de longitudes x_0 y $l - x_0$ que poseen diferentes densidades (ρ_1 y ρ_2) y módulos de elasticidad (E_1 y E_2), suponiendo que los extremos de la barra:

a) están fijos rígidamente,

b) están libres,

c) están fijos elásticamente.

19. A un extremo de la barra está sujeto un peso de masa M. Hallar las oscilaciones elásticas longitudinales propias de la barra, considerando que el segundo extremo de la misma

a) está fijo rígidamente,

b) está libre,

c) está fijo elásticamente.

---

*) Esto significa que $\frac{\partial u}{\partial x}$ en los extremos de la cuerda son iguales a cero. Ello tiene lugar, por ejemplo, cuando los extremos de la cuerda están fijos mediante anillos (con la masa despreciablemente pequeña) que resbalan sin rozamiento por barras paralelas.

Prestar atención a la condición de ortogonalidad de las funciones propias.

Para el problema a) examinar los casos de las cargas pequeñas y grandes, hallando las correspondientes correcciones a los valores propios no perturbados.

20. Resolver el problema sobre las oscilaciones propias de la cuerda cargada con una masa concentrada M colgada en cierto punto interior de la cuerda, suponiendo que los extremos de ésta:

a) están fijos rígidamente,

b) están libres,

c) están fijos elásticamente.

Calcular las correcciones a los valores propios para el problema a).

21. Hallar las oscilaciones transversales propias de una barra homogénea si:

a) ambos extremos de la barra están fijos rígidamente,

b) ambos extremos de la barra están libres,

c) un extremo de la barra está libre y el otro está fijo rígidamente.

Hallar el primer término del desarrollo asintótico de las frecuencias propias.

2. Oscilaciones propias de los volúmenes

22. Hallar las oscilaciones propias de una membrana rectangular:

a) con la frontera fija rígidamente,

b) con la frontera libre,

c) si dos lados opuestos están fijos y otros dos, libres,

d) si dos lados adyacentes están fijos y otros dos, libres,

e) con la frontera fija elásticamente.

23. Resolver el problema 22 para la membrana circular (los casos a), b), e)).

24. Determinar los valores propios y las funciones propias normadas para un paralelepípedo rectangular con:

a) las condiciones de frontera de primer género,

b) las condiciones de frontera de segundo género,

c) las condiciones de frontera de tercer género.

25. Hallar las oscilaciones propias de una esfera con

a) las condiciones de frontera de primer género,

b) las condiciones de frontera de segundo género,

c) las condiciones de frontera de tercer género.

26. Resolver el problema sobre las oscilaciones propias de un cilindro circular de longitud finita con las condiciones de frontera:

a) de primer género,

b) de segundo género,

c) de tercer género.

27. Determinar las oscilaciones propias de una membrana que tiene la forma de un anillo circular $a \leqslant \rho \leqslant b$ si su frontera:

a) está fija rígidamente,
b) está libre,
c) está fija elásticamente.

28. Determinar las oscilaciones propias de una membrana que tiene la forma de un sector circular ($\rho \leqslant a$, $0 \leqslant \varphi \leqslant \varphi_0$) si su frontera:

a) está fija rígidamente,
b) está libre,
c) está fija elásticamente.

29. Hallar las oscilaciones propias de una membrana que tiene la forma de un sector del anillo ($a \leqslant \rho \leqslant b$, $0 \leqslant \varphi \leqslant \varphi_0$):

a) con la frontera fija rígidamente,
b) con la frontera libre,
c) con la frontera fija elásticamente.

30. Determinar los valores propios y las funciones propias de un toroide de sección rectangular ($a \leqslant \rho \leqslant b$, $0 \leqslant z \leqslant l$) para las condiciones de frontera:

a) de primer género,
b) de segundo género,
c) de tercer género.

31. Una membrana plana tiene la forma de un anillo con el radio exterior a y el radio interior ε; la frontera de la membrana está fija rígidamente.

Comparar el primer valor propio λ_1 de tal membrana con el primer valor propio λ_1^0 de la membrana circular de radio a, para eso

a) mostrar que $\lim\limits_{\varepsilon \to 0} \lambda_1 = \lambda_1^0$,

b) calcular la corrección $\Delta\lambda = \lambda_1 - \lambda_1^0$ para ε pequeños.

32. Una membrana circular de radio a está cargada con una masa M uniformemente distribuida sobre el círculo absolutamente rígido de radio ε ($r \leqslant \varepsilon$).

Comparar los valores propios λ_n de esta membrana con los valores propios λ_n^0 de la membrana no cargada.

Examinar dos casos: M pequeño y M grande. Si $M \to 0$, entonces $\lambda_n \to \lambda_n^0$. Si $M \to \infty$, entonces $\lambda_n \to \lambda_{n-1}^0$ además $\lambda_1 \to 0$.

33. Resolver el problema 31, suponiendo que la frontera exterior está libre.

34. Formular el problema sobre las oscilaciones propias de un tambor como el problema sobre las oscilaciones de una membrana circular con el volumen asociado de aire. ¿Cómo depende la frecuencia principal de las dimensiones del volumen asociado (véase el problema 5 del cap. VI)?

35. La membrana circular de un tambor grande tiene el radio

$$r_0 = 50 \text{ cm}, \quad \rho = 0{,}1 \text{ gr/cm}^2, \quad T = 10^8 \text{ din/cm}.$$

¿Cuál será la frecuencia principal si la membrana oscila en un espacio libre? La conexión de cierto volumen de aire a la membrana aumenta la frecuencia principal 1,45 veces. Determinar la magnitud del volumen asociado.

§ 3. Propagación y radiación del sonido

En este parágrafo se examinarán algunos problemas sobre la propagación, radiación y dispersión del sonido sobre los cuerpos sólidos que conducen a la ecuación de onda

$$\Delta u + k^2 u = 0 \quad (k^2 > 0). \tag{1}$$

Al resolver la ecuación de la onda para un cilindro y una esfera aparecen las funciones esféricas $Y_n^{(k)} = P_n^{(k)} (\cos \vartheta)_{\text{sen}}^{\cos} k\varphi, Y_n(\vartheta) = P_n(\cos \vartheta)$ y diferentes funciones cilíndricas.

Para resolver los problemas exteriores para un cilindro se usan las funciones de Hankel:

$$H_n^{(2)}(\rho) = \begin{cases} \sqrt{\dfrac{2}{\pi\rho}}\, e^{-i\left(\rho - \frac{\pi}{2} n - \frac{\pi}{4}\right)} + \ldots & \text{para } \rho \text{ grandes,} \\ \left.\begin{array}{ll} \dfrac{i}{\pi}\left(\dfrac{2}{\rho}\right)^n (n-1), & n > 0, \\ \dfrac{2i}{\pi} \ln \dfrac{1}{\rho}, & n = 0 \end{array}\right\} & \text{para } \rho \text{ pequeños,} \end{cases}$$

en nuestro caso $\rho = kr$. La función $H_n^{(2)}(kr)$ satisface la condición de radiación

$$\lim_{r \to \infty} \sqrt{r} \left(\frac{\partial u}{\partial r} + iku \right) = 0,$$

que corresponde a la dependencia del tiempo de tipo $e^{i\omega t}$. Para resolver los problemas sobre la radiación del sonido por una esfera y la dispersión sobre una esfera se utilizan las funciones

$$\psi_n(\rho) = \sqrt{\frac{\pi}{2\rho}}\, J_{n+\frac{1}{2}}(\rho) = \begin{cases} \dfrac{\operatorname{sen}\left(\rho - \frac{\pi}{2} n\right)}{\rho} + \ldots & \text{para } \rho \text{ grandes,} \\ \dfrac{\rho^n}{1\cdot 3\cdot 5 \ldots (2n+1)} + \ldots & \text{para } \rho \text{ pequeños} \end{cases}$$

$$\zeta_n^{(2)}(\rho) = \sqrt{\frac{\pi}{2\rho}}\, H^2_{n+\frac{1}{2}}(\rho) =$$

$$= \begin{cases} \dfrac{e^{-i\left(\rho - \frac{\pi}{2}(n+1)\right)}}{\rho} + \ldots & \text{para } \rho \text{ grandes} \\ i\, \dfrac{1\cdot 3\cdot 5 \ldots (2n-1)}{\rho^{n+1}} + \dfrac{\rho^n}{1\cdot 3 \ldots (2n+1)} + \ldots & \text{para } \rho \text{ pequeños.} \end{cases}$$

En lo sucesivo utilizaremos para ρ pequeños la representación siguiente de la función $\zeta_m^{(2)}(\rho)$:

$$\zeta_m^{(2)}(\rho) = \alpha_m e^{i\gamma_m} + \ldots,$$

donde

$$\alpha_m = \frac{1\cdot 3 \ldots (2m-1)}{\rho^{m+1}}, \quad \gamma_m = \frac{\rho^{2m+1}}{1^2 \cdot 3^2 \ldots (2m-1)^2 (2m+1)^2}.$$

La función $\zeta_n^{(2)}(kr)$ satisface la condición de radiación

$$\lim_{r\to\infty} r\left(\frac{\partial u}{\partial r} + iku\right) = 0,$$

que corresponde a la dependencia del tiempo de tipo $e^{i\omega t}$.

Todas las informaciones teóricas necesarias acerca del material del § 3 se puede encontrar en el cap. VII y también en los complementos I y II del curso [7].

1. Manantial puntiforme

36. Hallar la función del manantial para el semiespacio $z > 0$ si sobre el plano $z = 0$ la solución de la ecuación $\Delta v + k^2 v = 0$

a) satisface la condición de frontera de primer género $v|_{z=0} = f$,

b) satisface la condición de segundo género $\frac{\partial v}{\partial z}|_{z=0} = f$.

37. Hallar la función del manantial para la ecuación de la onda en el semiespacio $y > 0$

a) para el primer problema de contorno,

b) para el segundo problema de contorno.

38. Calcular la energía que se irradia en el espacio libre por un manantial acústico puntiforme aislado que oscila según la ley armónica. Hallar también la magnitud de la impedancia acústica específica.

39. Un manantial acústico puntiforme está puesto en el semiespacio $z < 0$ a una distancia a de la pared absolutamente rígida $z = 0$.

Hallar la radiación del manantial, su intensidad en la zona de la onda y comparar con la solución del problema 38.

40. Resolver el problema 39, considerando que el semiespacio está lleno de un líquido acotado por la superficie libre $z = 0$ en que la presión es igual a cero. Comparar con las soluciones de los problemas 38 y 39.

41. Demostrar el principio de reciprocidad en la acústica: «Si en el espacio lleno de aire, parcialmente acotado por unos cuerpos inmóviles que se extienden a una distancia finita y parcialmente también no acotado, en cualquier punto M se excitan las ondas acústicas, entonces el potencial de velocidades generado por ellas en cualquier otro punto P por su magnitud y la fase coincide con aquel

que tuviese lugar en el punto M si en P se encontrase el manantial acústico» (véase [36]).

42. Demostrar que en un tubo cilíndrico infinito de sección arbitraria con las paredes absolutamente rígidas en ciertas condiciones pueden existir las ondas acústicas móviles. Hallar la velocidad de fase de las ondas móviles y calcular el flujo de energía a través de la sección infinitamente alejada del tubo (del guíaondas). Examinar los casos de las secciones rectangular y circular.

43. Construir la función del manantial puntiforme colocado dentro del tubo cilíndrico de sección arbitraria para la ecuación de onda con las condiciones de frontera

a) de primer género,

b) de segundo género.

Examinar el caso particular de la sección circular.

44. Resolver el problema 43 para el tubo semiacotado $z > 0$.

45. Construir la función del manantial puntiforme para el resonador cilíndrico $0 \leqslant z \leqslant l$ con la sección transversal arbitraria. Considerar las paredes del resonador absolutamente rígidas.

2. Radiación de las membranas, cilindros y esferas

46. Sea que en la sección $z = 0$ del tubo de sección circular examinado en el problema 42 se ha colocado una membrana que oscila con la velocidad $v = v_0 e^{i\omega t}$ (el pistón). Determinar la reacción de la presión de las ondas acústicas sobre la membrana.

47. Resolver el problema 46, suponiendo que la velocidad del pistón exitante varía según la ley

$$v = v_0(r)\, e^{i\omega t},$$

donde $v_0(r)$ es una función dada.

Examinar el caso particular

$$v_0(r) = AJ_0\left(\frac{\mu_m}{a} r\right),$$

donde A es una constante; μ_m, la raíz de la ecuación $J_0(\mu) = 0$.

Hallar la magnitud del vector de Umov y el valor de la impedancia acústica sobre el pistón.

48. Sea que el cilindro de radio a pulsa, es decir, se comprime y se ensancha uniformemente según la ley armónica; su velocidad sobre la superficie para $r = a$ es igual a

$$v_0 e^{i\omega t}.$$

Hallar la presión, la velocidad radial del aire a una distancia grande del eje del cilindro y también el flujo de energía.

49. Resolver el problema 48, suponiendo que el radio del cilindro es pequeño en comparación con la longitud de la onda $\lambda = \frac{2\pi c}{\omega}$,

es decir,

$$ka \ll 1.$$

50. Un cilindro de radio a vibra, como entero, perpendicularmente a su eje (en el sentido del eje x) con la velocidad $v_0 e^{i\omega t}$. Hallar la presión y las velocidades de las partículas del aire; para el caso $ka \ll 1$ calcular la impedancia acústica específica y la potencia completa de radiación para una unidad de longitud.

51. Un cilindro de radio a vibra según la ley armónica de modo que la velocidad sobre su superficie es igual a

$$f(\varphi)\, e^{i\omega t},$$

donde $f(\varphi)$ es una función dada. Hallar la presión y la velocidad del aire, el flujo de energía $\left(\text{para } ka \text{ pequeños, donde } k = \frac{\omega}{c}\right)$.

Obtener de las fórmulas halladas las soluciones de los problemas 48—50.

52. El centro de una esfera de radio a oscila en el sentido del eje polar con la velocidad $v_0 e^{i\omega t}$. Si $a \ll \lambda$ $(ka \ll 1)$, λ es la longitud de la onda, entonces tal radiador acústico en forma de pequeña esfera oscilante se llama dipolo acústico. Hallar el flujo de energía y la potencia completa que irradia el dipolo acústico.

53. La superficie de una esfera de dimensiones finitas oscila según la ley acústica $f(\theta)\, e^{i\omega t}$. Hallar la reacción completa del medio sobre la esfera para $ka \ll 1$, donde $k = \frac{\lambda}{2\pi}$. Considerar el caso particular

$$f(\theta) = v_0.$$

54. Investigar el campo acústico de un pistón insertado al ras con la superficie de una esfera y capaz de oscilar sin rozamiento. La distribución de las velocidades sobre la esfera al existir tal pistón se puede representar del modo siguiente:

$$v(\theta) = \begin{cases} v_0 & \text{para} \quad 0 \leqslant \theta \leqslant \theta_0, \\ 0 & \text{para} \quad \theta_0 < \theta \leqslant \pi. \end{cases}$$

Examinar el caso de un θ_0 pequeño. Dar la expresión de la presión para las frecuencias bajas.

55. La superficie de una esfera vibra de modo que la componente radial de la velocidad sobre la superficie es igual a

$$v_a = \frac{v_0}{4}(1 + 3\cos 2\theta)\, e^{i\omega t}.$$

Tal manantial acústico se llama radiador de segundo orden o manantial cuadrípolo. Calcular la intensidad y la potencia de su radiación. Trazar el diagrama polar de la intensidad de la radiación. Examinar el caso de las ondas largas.

56. Una placa circular sólida vibra según la ley armónica en el hueco circular igual por su área a ésta y recortado en la placa plana sólida que se extiende al infinito. Hallar la presión y la velocidad de las partículas del aire y la potencia de la radiación.

57. Hallar la reacción del campo acústico sobre la placa, examinada en el problema 56. Examinar el caso particular cuando el radio del pistón es pequeño en comparación con la longitud de la onda ($ka \ll 1$).

58. Resolver el problema 56 si sobre la superficie del pistón (de la placa) la velocidad es variable:

$$v = f(r)$$

(pistón «no rígido»). Limitarse a la representación de la solución en la zona de la onda.

3. Difracción sobre el cilindro y la esfera

59. La onda plana acústica se propaga en una dirección perpendicular al eje del cilindro rígido infinito de radio a. Hallar la onda dispersa. Examinar los casos de las distancias pequeñas y grandes desde el cilindro.

60. Basándose en la solución del problema 59, calcular la intensidad de la onda dispersa y también investigar la dependencia de la característica de la directividad de la onda dispersa con respecto a la longitud de la onda.

61. Calcular la potencia total en la onda del sonido dispersa sobre una unidad de longitud del cilindro para los casos límites de las ondas cortas y largas (véase el problema 59). Hallar la fuerza que actúa sobre el cilindro.

62. Construir la solución del problema sobre la dispersión de la onda plana del sonido sobre el obstáculo esférico.

63. Utilizando la solución del problema 62, calcular la intensidad de la onda dispersa y la potencia dispersa total para el caso

$$ka \ll 1,$$

donde $k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{\omega}{c}$, λ, la longitud de la onda, a, el radio de la esfera.

Calcular la fuerza que actúa sobre la esfera.

64. Resolver el problema sobre la dispersión de una onda plana sobre la esfera de radio $\rho = a$, si la esfera está completamente libre y se mueve bajo la acción del aire.

65. Resolver el problema sobre el movimiento de la esfera de radio a bajo la acción de la onda plana incidente si la esfera está

fija elásticamente, es decir, la fuerza de retorno es igual a

$$X = -M\omega_0^2\xi,$$

donde ξ es la coordenada del centro de la esfera; M, la masa de la esfera.

Despreciar el rozamiento del aire.

§ 4. Oscilaciones electromagnéticas estables

1. Ecuaciones de Maxwell. Potenciales. Fórmulas vectoriales de Green—Ostrogradski

66. Escribir las ecuaciones de Maxwell en el sistema curvilíneo ortogonal de coordenadas (x_1, x_2, x_3), en que el cuadrado del elemento de longitud se da por la fórmula

$$ds^2 = h_1^2\, dx_1^2 + h_2^2 dx_2^2 + h_3^2 dx_3^2,$$

donde h_1, h_2, h_3 son los coeficientes métricos.

67. Demostrar que la solución de las ecuaciones de Maxwell

$$\operatorname{rot} H = \frac{1}{c}\frac{\partial D}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} j, \quad \operatorname{div} B = 0, \qquad B = \mu H \ (\mu = \text{const}),$$

$$\operatorname{rot} E = -\frac{1}{c}\frac{\partial B}{\partial t}, \qquad \operatorname{div} D = 4\pi\rho, \qquad D = \varepsilon E \ (\varepsilon = \text{const})$$

puede representarse de la forma

$$B = \operatorname{rot} A, \quad E = -\operatorname{grad}\varphi - \frac{1}{c}\frac{\partial A}{\partial t},$$

donde A es el potencial vectorial, φ, el potencial escalar relacionados entre sí por la condición de Lorentz

$$\operatorname{div} A + \frac{\varepsilon\mu}{c}\frac{\partial\varphi}{\partial t} = 0$$

y que satisface las ecuaciones

$$\Delta\varphi - \frac{1}{a^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} = -\frac{4\pi}{\varepsilon}\rho, \quad a^2 = \frac{c^2}{\varepsilon\mu},$$

$$\Delta A - \frac{1}{a^2}\frac{\partial^2 A}{\partial t^2} = -\frac{4\pi}{c}\mu j.$$

Aquí ΔA es el operador de Laplace que actúa sobre las componentes curvilíneas del vector A.

Hallar la expresión de ΔA en las coordenadas curvilíneas ortogonales. Demostrar que para $\rho = 0$, $j = 0$, las ecuaciones de Maxwell admiten la solución de la forma

$$D = \operatorname{rot} A', \quad H = -\operatorname{grad}\varphi' - \frac{1}{c}\frac{\partial A'}{\partial t},$$

donde A' y φ' son los llamados antipotenciales.

Examinar el caso cuando la dependencia del tiempo es de la forma $e^{-i\omega t}$.

68. Introducir los potenciales escalar y vectorial para las ecuaciones de Maxwell en un medio conductor homogéneo.

69. Introducir el potencial polarizado $\boldsymbol{\Pi}$ (el vector eléctrico de Hertz) para las ecuaciones de Maxwell en el vacío, utilizando las relaciones

$$A=\frac{1}{c}\frac{\partial \boldsymbol{\Pi}}{\partial t}, \quad \varphi=-\operatorname{div}\boldsymbol{\Pi}$$

donde A es el potencial vectorial; φ, el potencial escalar.

Examinar el caso cuando la dependencia del tiempo es de la forma $e^{-i\omega t}$. Análogamente, introducir el vector magnético de Hertz $\boldsymbol{\Pi}'$. Determinar los vectores de Hertz en un medio conductor.

70. Si los coeficiente métricos satisfacen las condiciones $h_1=1$, $\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{h_2}{h_3}\right)=0$ y el campo electromagnético en el vacío depende del tiempo como $e^{-i\omega t}$, entonces el campo se puede representar mediante dos funciones escalares U y U' (las funciones de Borguins).

a) para el campo de tipo eléctrico ($H_1=0$) tenemos:

$$E_1=k^2U+\frac{\partial^2 U}{\partial x_1^2}, \quad E_2=\frac{1}{h_2}\frac{\partial^2 U}{\partial x_1\,\partial x_2}, \quad E_3=\frac{1}{h_3}\frac{\partial^2 U}{\partial x_1\,\partial x_3}, \ \left(k=\frac{\omega}{c}\right),$$

$$H_1=0, \qquad H_2=-\frac{ik}{h_3}\frac{\partial U}{\partial x_3}, \quad H_3=\frac{ik}{h_2}\frac{\partial U}{\partial x_2};$$

b) para el campo de tipo magnético ($E_1=0$) tenemos:

$$E_1'=0, \qquad E_2'=\frac{ik}{h_3}\frac{\partial U'}{\partial x_3}, \qquad E_3'=-\frac{ik}{h_2}\frac{\partial U'}{\partial x_2},$$

$$H_1'=k^2U'+\frac{\partial^2 U'}{\partial x_1^2}; \quad H_2'=\frac{1}{h_2}\frac{\partial^2 U'}{\partial x_1\,\partial x_2}; \qquad H_3'=\frac{1}{h_3}\frac{\partial^2 u'}{\partial x_1\,\partial x_3},$$

donde U y U' son las funciones que satisfacen la ecuación

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x_1^2}+\frac{1}{h_2h_3}\left[\frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{h_3}{h_2}\frac{\partial U}{\partial x_2}\right)+\frac{\partial}{\partial x_3}\left(\frac{h_2}{h_3}\frac{\partial U}{\partial x_3}\right)\right]+k^2U=0.$$

Demostrar esta afirmación.

Examinar después los sistemas esférico y cilíndrico de coordenadas. Demostrar que en el sistema cilíndrico de coordenadas la función U coincide con la componente z del vector de Hertz $\boldsymbol{\Pi}=(0,\ 0,\ U)$.

71. Introducir las funciones U y U' para el campo electromagnético en un medio conductor cuyos parámetros son ε, μ, σ (conductibilidad).

72. La esfera de radio a con conductibilidad σ_1 y constante dieléctrica ε_1, está colocada en un medio no acotado de conductibilidad σ_2 y constante dieléctrica ε_2. Introduciendo las funciones U

y U', formular para ellas las condiciones de frontera sobre la superficie de la esfera.

73. Demostrar la validez del vectorial análogo de la segunda fórmula de Green

$$\int_T (W \operatorname{rot}\operatorname{rot} U - U \operatorname{rot}\operatorname{rot} W)\, d\tau = \int_\Sigma \{[U \operatorname{rot} W] - [W \operatorname{rot} U]\}\, n\, d\sigma,$$

donde $U = U(x, y, z)$, $W = W(x, y, z)$ son funciones arbitrarias suficientemente suaves; T, cierto volumen acotado por la superficie Σ; n, el vector unitario de la normal a la superficie Σ.

74. Demostrar la validez del vectorial análogo de la fórmula principal de Green

$$U(M_0) = U(x, y, z) =$$
$$= \frac{1}{4\pi} \int_T \{\varphi(\operatorname{rot}\operatorname{rot} U - k^2 U) + \operatorname{grad}\varphi \operatorname{div} U\}\, d\tau_P -$$
$$- \frac{1}{4\pi} \int_\Sigma \{[n \operatorname{rot} U]\,\varphi + [[nU] \operatorname{grad}\varphi] + (nU) \operatorname{grad}\varphi\}\, d\sigma_P,$$

donde U es un vector arbitrario,

$$\varphi = \frac{e^{ikr}}{r}, \quad r = \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2},$$

la distancia entre los puntos $M(x, y, z)$ y $P(\xi, \eta, \zeta)$.

75. Utilizando la fórmula vectorial principal de Green obtenida en el problema anterior, directamente, sin introducir los potenciales, escribir las expresiones de E y H que son las soluciones de las ecuaciones de Maxwell

$$\operatorname{rot} H = -ik_0\varepsilon E + \frac{4\pi}{c} j, \quad k_0 = \frac{\omega}{c}, \quad k = k_0\sqrt{\varepsilon\mu},$$

$$\operatorname{rot} E = ik_0\mu H_0, \quad \operatorname{div} H = 0, \quad \operatorname{div} E = \frac{4\pi\rho}{\varepsilon}$$

en los puntos interiores de cierta región T mediante sus valores sobre la superficie Σ que acota el volumen T.

2. Propagación de las ondas electromagnéticas y de las oscilaciones en los resonadores

76. Aclarar la posibilidad de la propagación de las ondas electromagnéticas a lo largo de un cilindro circular infinitamente largo, cuya conductibilidad es infinitamente grande. La conductibilidad del medio ambiente σ es finita.

77. Resolver el problema anterior, suponiendo que la conductibilidad del cilindro es finita e igual a σ_1.

78. Demostrar que dentro de un tubo cilíndrico, hueco e infinito (el guíaondas) de sección arbitraria, con paredes idealmente conductoras, puede existir un número finito de ondas electromagnéticas móviles. Hallar la expresión de la velocidad de fase y el flujo de energía de la onda móvil en el guíaondas.

79. Demostrar la existencia de ondas electromagneticas corrientes dentro de una cavidad limitada por dos suporficies cilíndricas coaxiles $\rho = a$ y $\rho = b$. Considerar la pared del coaxil idealmente conductora.

Calcular el flujo de energía y escribir la expresión para las componentes del campo para la onda principal que corresponde a la longitud mayor de onda.

80. Hallar las frecuencias propias y los campos electromagnéticos correspondientes de un resonador esférico con paredes idealmente conductoras. Calcular la energía media por el período en la onda fija.

81. Hallar las oscilaciones electromagnéticas propias del resonador cilíndrico que es un «segmento» del guíaondas radioeléctrico cilíndrico de sección arbitraria con paredes idealmente conductoras. Calcular la energía media por el período en la onda fija. Examinar los casos particulares de los resonadores

a) de sección rectangular,

b) de sección circular.

82. Determinar las frecuencias propias de las oscilaciones electromagnéticas dentro del resonador toroidal de sección rectangular, considerando que las paredes son igualmente conductoras.

83. *Difracción sobre el cilindro.* Una onda electromagnética plana cae sobre un conductor cilíndrico circular infinito, cuyo eje es perpendicular a la dirección de la propagación de la onda. Hallar el campo de difracción, considerando que el cilindro es conductor. El cilindro tiene capa dieléctrica con constante dieléctrica ε_1 y conductibilidad igual a cero. Examinar el caso del cilindro idealmente conductor. Suponiendo que el radio del cilindro a es pequeño en comparación con la longitud de onda incidente $\left(ka \ll 1,\ k = \frac{\lambda}{2\pi}\right)$, calcular la potencia dispersa total.

84. *Difracción sobre la esfera idealmente conductora.* Examinar el problema sobre la dispersión de una onda electromagnética plana sobre la esfera idealmente conductora. Hallar el campo electromagnético.

85. *Difracción sobre la esfera conductora.* Una onda electromagnética plana que se propaga en un medio con los parámetros $\varepsilon = \varepsilon_1$, $\sigma = 0$, $\mu = 1$, encuentra en su camino una esfera conductora de radio a, con parámetros $\varepsilon = \varepsilon_2$, $\mu = \mu_2$, $\sigma = \sigma_2 \neq 0$.

Hallar el campo electromagnético dentro y fuera de la esfera (el problema de Mie) acerca de la difracción sobre una esfera).

3. Radiación de las ondas electromagnéticas

86. Hallar el campo de radiación de un dipolo eléctrico infinitésimo que se encuentra en un espacio no conductor infinito. Calcular la potencia media por el período de radiación.

87. Resolver el problema anterior, utilizando la representación de las componentes del campo electromagnético mediante las funciones de Borguins en el sistema de coordenadas esféricas

$$E_r = \frac{d^2U}{dr^2} + k^2U, \quad E_\theta = \frac{1}{r}\frac{d^2U}{dr\,d\theta} \quad E_\varphi = \frac{1}{r\operatorname{sen}\theta}\frac{d^2U}{dr\,d\varphi},$$

$$H_r = 0, \quad H_\theta = -\frac{ik}{r}\frac{dU}{d\varphi}, \quad H_\varphi = \frac{ik}{r}\frac{\partial U}{d\theta},$$

donde la función U satisface la ecuación

$$\frac{d^2U}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2\operatorname{sen}\theta}\frac{d}{d\theta}\left(\operatorname{sen}\theta\frac{dU}{d\theta}\right) + \frac{1}{r^2\operatorname{sen}^2\theta}\frac{d^2U}{d\varphi^2} + k^2U = 0,$$

de modo que la función $u = \frac{U}{r}$ satisface la ecuación

$$\Delta u + k^2u = 0.$$

88. En el centro de un resonador esférico con paredes idealmente conductoras, hay un dipolo eléctrico infinitésimo dirigido según el radio.

Determinar el campo electromagnético generado por el dipolo dentro del resonador.

89. Una esfera conductora homogénea de radio a con las constantes ε_2, μ_2, σ_2 está puesta en un medio con otras constantes físicas ε_1, μ_1, σ_1. En el centro de la esfera se encuentra el dipolo eléctrico que oscila según la ley armónica $e^{-i\omega t}$. Calcular el campo dentro de la esfera, la potencia media por el período de radiación y examinar el caso límite $\sigma_1 \to \infty$. Estudiar el caso particular cuando $a \to \infty$.

90. Las paredes de un resonador esférico están hechas de un material conductor homogéneo que posee una conductibilidad σ. Sean $r = a$ y $r = b$, los radios de las paredes del resonador. En el centro del resonador hay un dipolo eléctrico que oscila según la ley armónica $e^{-i\omega t}$. Hallar las oscilaciones electromagnéticas impulsantes del resonador, considerando la región $r > b$ no conductora (el aire).

Examinar los casos límites, cuando $b \to \infty$ y $b \to a$.

91. Dentro de una esfera de radio a hay un dipolo eléctrico orientado según el radio y separado del centro de la esfera por la distancia $r = r'$. Determinar el campo electromagnético de radiación dentro de la esfera, suponiendo que ésta se halla rodeada por un medio homogéneo que posee una conductibilidad finita σ. Examinar el caso límite cuando $\sigma \to \infty$.

Considerar los casos particulares: el radio de la esfera es pequeño en comparación con la longitud de onda y $a \to \infty$.

92. *Antena eléctrica vertical sobre la tierra esférica.* Hallar el campo electromagnético generado por la antena eléctrica que se encuentra sobre la tierra y que se considera como una esfera cuyo radio a tiene conductibilidad finita σ y constante dieléctrica ε. Considerar la antena como un dipolo elemental que efectúa oscilaciones armónicas a lo largo de la dirección del diámetro de la tierra. Considerar la atmósfera homogénea y no conductora ($\varepsilon = \mu = 1$, $\sigma = 0$).

93. *Antena vertical sobre la tierra esférica.* Resolver el problema anterior (92), considerando que la antena se encuentra sobre la superficie terrestre y está dirigida según la normal a ella.

4. Antena sobre la tierra plana

En los problemas 94—101 se examina la propagación de las ondas radiadas por antenas que se encuentran sobre la superficie terrestre. Con esto supondremos que la tierra es plana, homogénea y conductora (a veces idealmente conductora, otras, poseedora de conductibilidad finita); consideraremos la antena como un dipolo cuyo momento varía periódicamente en el tiempo con una frecuencia ω: $p = p_0 e^{-i\omega t}$, para simplificidad supondremos $|p_0| = 1$.

Los problemas 94—97 tienen el carácter de planteamiento, aquí se debe introducir el vector de Hertz y plantear para sus componentes distintas de cero el problema de contorno.

Para resolver los problemas 98—101 se debe realizar el cálculo del campo electromagnético radiado por la antena y también la potencia media por el período de radiación.

Aquí para el método de resolución es esencial el desarrollo en la integral de Fourier — Bessel con la utilización de la integral de Sommerfeld

$$\frac{e^{ikR}}{R} = \int_0^\infty J_0(\lambda r)\, e^{-\sqrt{\lambda^2-k^2}\,|z|} \frac{\lambda\, d\lambda}{\sqrt{\lambda^2-k^2}}, \quad R = \sqrt{r^2+z^2}.$$

94. *Antena eléctrica vertical.* Sobre la superficie plana de la tierra que llena el semiespacio $z < 0$ hay una antena eléctrica vertical dirigida a lo largo del eje z.

Introducir el vector de Hertz y formular para él las condiciones de frontera sobre la superficie terrestre, distinguiendo también la singularidad en el manantial. Considerar $\mu = 1$.

95. *Antena magnética vertical.* Sobre la superficie terrestre $z = 0$ hay una antena magnética vertical (cuadro horizontal).

Resolver el problema de contorno para el correspondiente vector de Hertz si la tierra posee conductibilidad finita.

96. *Antena eléctrica horizontal.* Resolver el problema de contorno para la antena horizontal situada sobre la superficie terrestre, con conductibilidad finita.

97. *Antena magnética horizontal.* Un dipolo magnético elemental situado sobre la superficie terrestre $z = 0$ está orientado a lo largo del eje y, es decir, el cuadro con corriente se encuentra en el plano xz. Formular el correspondiente problema de contorno para el vector de Hertz, considerando que la tierra es conductora.

98. Hallar el campo electromagnético de radiación de una antena eléctrica vertical sobre la superficie terrestre plana (véase el problema 94). Calcular el flujo de energía de radiación, considerando $\mu = 1$. Examinar los casos cuando la tierra es conductora ideal y cuando se sustituye por el aire.

99. Determinar el campo radiado por la antena magnética vertical que se encuentra sobre la tierra plana (véase el problema 95).

100. Resolver el problema sobre la propagación de las ondas radiadas por una antena eléctrica horizontal que se encuentra sobre la superficie terrestre (véase el problema 96).

101. Hallar el campo electromagnético generado por una antena magnética horizontal situada sobre la superficie terrestre plana (véase el problema 97).

102. Un dipolo eléctrico vertical está situado en el punto $z = z_0$, $r = 0$ del medio *1*, con constante de propagación igual a k_1. El medio *2* tiene forma de la plancha plana paralela con constante de propagación k_2 y fronteras $z = a < z_0$ y $z = 0$. El semiespacio $z < 0$ es idealmente conductor.

Hallar el potencial polarizado del campo secundario Π_{sec}.

103. Hallar el campo electromagnético excitado por la corriente lineal en un espacio no acotado y calcular el campo en la zona de onda.

Determinar la resistencia de radiación.

104. Determinar la resistencia de radiación del dipolo semiondular en un espacio no acotado y también la parte reactiva de la resistencia de entrada (reactancia) del dipolo semiondular.

105. Dentro del guíaondas cilíndrico examinado en el problema 78 hay un dipolo puntiforme paralelo al eje del guíaondas y de vibración armónica según la ley $e^{-i\omega t}$.

Hallar el flujo de energía medio radiada en el período por el dipolo. Calcular la resistencia de radiación. Buscar la solución para un guíaondas de sección arbitraria y después examinar el guíaondas de sección circular, suponiendo que el dipolo se encuentra sobre el eje del guíaondas.

106. Hallar la expresión para el campo electromagnético dentro del guíaondas, excitado por una corriente lineal de longitud $2l$ paralela al eje del guíaondas y calcular el flujo de energía a través de la sección transversal del tubo para el caso particular del dipolo

semiondular situado sobre el eje del guíaondas radioeléctrico de sección circular. Hallar las componentes activa y reactiva de la resistencia de entrada. Resolver el problema con la aproximación de las corrientes dadas, despreciando la influencia del campo secundario sobre la distribución de la corriente en el dipolo.

107. Utilizar la solución del problema 106 para la búsqueda de la resistencia de radiación y de reactancia del dipolo semiondular situado sobre el eje del guíaondas de sección circular y dirigido a lo largo de este eje.

108. Calcular el campo excitado dentro del guíaondas radioeléctrico con paredes idealmente conductoras por el dipolo eléctrico perpendicular al eje del guíaondas y paralelo a uno de los lados de la sección perpendicular; hallar la resistencia de radiación para:

a) el dipolo infinitésimo,

b) el dipolo semiondular.

Capítulo V

ECUACIONES DE TIPO PARABÓLICO

§ 1. Problemas físicos que se reducen a ecuaciones de tipo parabólico; planteamiento de los problemas de contorno

1. Para la temperatura del líquido en el caso no estacionario tenemos

$$\frac{\partial u}{\partial t}=a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)-v_0\frac{\partial u}{\partial x},$$
$$-\infty<x,\ y<+\infty,\quad 0<z,\ t<+\infty, \tag{1}$$

a^2 es el coeficiente de termodifusividad;

$$\lambda\frac{\partial u}{\partial z}=\alpha(u-f)\quad \text{para}\quad z=0, \tag{2}$$

donde $f(x, y, t)$ es la temperatura del plano $z=0$;

$$u\,|_{t=0}=\varphi(x, y, z),\quad -\infty<x,\ y<+\infty,\quad 0<z<+\infty, \tag{3}$$

en el caso estacionario (con la conductibilidad térmica «despreciablemente pequeña» en el sentido del eje x)

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{a^2}{v_0}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right).\quad -\infty<y<+\infty,\quad 0<x,\quad z<+\infty, \tag{1'}$$

$$\lambda\frac{\partial u}{\partial z}=\alpha(u-f_0)\quad \text{para}\quad z=0, \tag{2'}$$

donde $f_0(x, y)$ es la temperatura del plano $z=0$,

$$u\,|_{x=0}=\varphi_0(y, z),\quad -\infty<y<+\infty,\quad 0<z<+\infty. \tag{3'}$$

2. Para la concentración de la sustancia que se difunde en el medio móvil, que llena el semiespacio $z>0$ y se mueve con velocidad constante en el sentido del eje x, con la condición de que el plano $z=0$ es impermeable, en el caso no estacionario tenemos:

$$\frac{\partial u}{\partial t}=D\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)-v_0\frac{\partial u}{\partial x},$$
$$-\infty<x,\ y<+\infty,\quad 0<z,\ t<+\infty, \tag{1}$$

$$\frac{\partial u}{\partial z}=0\quad \text{para}\quad z=0, \tag{2}$$

D es el coeficiente de la difusión;
en el caso estacionario (con las condiciones del problema)

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{D}{v_0}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right),\quad -\infty<y<+\infty,\quad 0<x,\quad z<+\infty, \tag{1'}$$

$$\frac{\partial u}{\partial z}=0\quad \text{para}\quad z=0, \tag{2'}$$

$$u\,|_{x=0}=\varphi(y, y),\quad -\infty<y<+\infty,\quad 0<z<+\infty. \tag{3'}$$

3. a) $\frac{\partial u}{\partial t}=D\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)-\beta u, \quad \beta>0,$

$$-\infty<x,\ y,\ z<+\infty, \quad 0<t<+\infty, \tag{1}$$

$$u\,|_{t=0}=\varphi(x,\ y,\ z), \quad -\infty<x,\ y,\ z<+\infty, \tag{2}$$

b) $\frac{\partial u}{\partial t}-D\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)+\beta u, \quad \beta>0,$

$$-\infty<x,\ y,\ z<+\infty, \quad 0<t<+\infty, \tag{1'}$$

$$u\,|_{t=0}=\varphi(x,\ y,\ z), \quad -\infty<x,\ y,\ z<+\infty. \tag{2'}$$

4. $$\left.\begin{aligned}\frac{\partial E}{\partial t}&=\frac{c^2}{4\pi\mu\sigma}\left(\frac{\partial^2 E}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 E}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 E}{\partial z^2}\right),\\ \frac{\partial H}{\partial t}&=\frac{c^2}{4\pi\mu\sigma}\left(\frac{\partial^2 H}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 H}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 H}{\partial z^2}\right),\end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned}&-\infty<x,\\ &y,\ z<+\infty,\\ &0<t<+\infty,\end{aligned} \qquad \begin{aligned}(1)\\(1')\end{aligned}$$

donde E y H son los vectores de las intensidades eléctrica y magnética c, la velocidad de la luz en el vacío; μ, la permeabilidad magnética; σ, la conductibilidad,

$$\left.\begin{aligned}E\,|_{t=0}&=i\varphi_1(x,\ y,\ z)+j\varphi_2(x,\ y,\ z)+k\varphi_3(x,\ y,\ z),\\ H\,|_{t=0}&=i\psi_1(x,\ y,\ z)+j\psi_2(x,\ y,\ z)+k\psi_3(x,\ y,\ z),\end{aligned}\right\} -\infty<x,\ y,\ z<+\infty \qquad \begin{aligned}(2)\\(2')\end{aligned}$$

donde i, j, k son los vectores unitarios según los ejes x, y, z y φ_1, φ_2, φ_3, ψ_1, ψ_2, ψ_3 funciones dadas.

Indicación. Examinemos el sistema de ecuaciones de Maxwell

$$\text{rot}\ H=\frac{1}{c}\frac{\partial D}{\partial t}+\frac{4\pi}{c}j, \tag{3}$$

$$\text{rot}\ E=-\frac{1}{c}\frac{\partial B}{\partial t}, \tag{4}$$

$$\text{div}\ B=0, \tag{5}$$

$$\text{div}\ D=0, \tag{6}$$

escrita en el supuesto de que en la región examinada no existen cargas volumétricas ni fuerzas electromotrices ajenas.

Utilizando así llamadas ecuaciones materiales del campo

$$D=\varepsilon E, \quad B=\mu H, \quad j=\sigma E \tag{7}$$

y la condición de la constancia de ε, μ, σ, y despreciando las corrientes de desplazamiento $\frac{1}{c}\frac{\partial D}{\partial t}$ en comparación con las corrientes de la conducción $\frac{4\pi}{c}j=\frac{4\pi\sigma}{c}E$, obtenemos las ecuaciones

$$\text{rot}\ E=-\frac{\mu}{c}\frac{\partial H}{\partial t}, \tag{8}$$

$$\text{rot}\ H=\frac{4\pi\sigma}{c}E. \tag{9}$$

Si de ambos miembros de la ecuación (8) tomamos rot y utilizamos la igualdad conocida del análisis vectorial

$$\text{rot rot}\ \boldsymbol{a}=\text{grad div}\ \boldsymbol{a}-\text{div grad}\ \boldsymbol{a},$$

entonces, mediante las ecuaciones (6), (7) y (9) se puede obtener la ecuación (1). Análogamente se logra la ecuación (1′).

5. $$\frac{\partial u}{\partial t}=a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right),$$

$$0\leqslant x\leqslant l,\quad -\infty<y,\ z<+\infty,\quad 0<t<+\infty, \tag{1}$$

$$\lambda u_x(0,\ y,\ z,\ t)=hu(0,\ y,\ z,\ t)=0,\quad \lambda u_x(l,\ y,\ z,\ t)+hu(l,\ y,\ z,\ t)=0, \tag{2}$$

$$u(x,\ y,\ z,\ 0)=f(x,\ y,\ z),$$

donde l es el espesor de la placa; λ, el coeficiente de la conductibilidad térmica. Si la temperatura varía despreciablemente poco según el espesor, entonces

$$u=u(y,\ z,\ t)$$

y $$\frac{\partial u}{\partial t}=a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)-2h_1u,\quad -\infty<y,\ z<+\infty,\quad 0<t<+\infty, \tag{3}$$

$$h_1=\frac{h}{c\rho_1},$$

donde ρ_1 es la masa de la unidad del área de la placa.

6. $$\frac{\partial u}{\partial t}=a^2\left\{\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2}\right\},$$

$$r_1\leqslant r\leqslant r_2,\quad 0\leqslant\varphi\leqslant 2\pi,\quad 0<t<+\infty, \tag{1}$$

$$\lambda u_r(r_1,\ \varphi,\ t)-h[u(r_1,\ \varphi,\ t)-U(t)]=0,\quad 0<t<+\infty, \tag{2}$$

$$\lambda u_r(r_2,\ \varphi,\ t)+h[u(r_2,\ \varphi,\ t)-U_0]=0,\quad 0<t<+\infty, \tag{2'}$$

$$\pi r_1c^*\rho^*\frac{dU(t)}{dt}=-h\left[2\pi U(t)-\int_0^{2\pi}u(r_1,\ \varphi,\ t)\,d\varphi\right],\quad 0<t<+\infty, \tag{2''}$$

donde $U(t)$, ρ^*, c^* son la temperatura, la densidad de masa y el calor específico del líquido dentro del tubo., $u(r,\ \varphi,\ 0)=f(r,\ \varphi)$, $r_1\leqslant r\leqslant r_2$ $0\leqslant\varphi\leqslant 2\pi$.

7. Para determinar la velocidad $v(r,\ t)$ de las partículas del líquido*) y la velocidad angular $\omega(t)$ del cilindro obtenemos el problema de contorno

$$\frac{\partial v}{\partial t}=\nu\left\{\frac{\partial^2 v}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial r}-\frac{v}{r^2}\right\},\quad r_0\leqslant r<\infty,\quad 0<t<+\infty, \tag{1}$$

$$v|_{r=r_0}=r_0\omega(t),\quad v\to 0\quad \text{para}\quad r\to+\infty,\quad 0<t<+\infty, \tag{2}$$

$$K\frac{d\omega}{dt}=M+2\pi r_0^2\rho\nu\left[\frac{\partial v}{\partial r}-\frac{v}{r}\right]_{r=r_0}. \tag{3}$$

Indicación. En las coordenadas cilíndricas

1) Las ecuaciones del movimiento del líquido viscoso incompresible son

$$\frac{\partial v_r}{\partial t}+v_r\frac{\partial v_r}{\partial r}+\frac{v_\varphi}{r}\frac{\partial v_r}{\partial\varphi}+v_z\frac{\partial v_r}{\partial z}-\frac{v_\varphi^2}{r}=$$
$$=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial r}+\nu\left(\frac{\partial^2 v_r}{\partial r^2}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 v_r}{\partial\varphi^2}+\frac{\partial^2 v_r}{\partial z^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial v_r}{\partial r}-\frac{2}{r^2}\frac{\partial v_\varphi}{\partial\varphi}-\frac{v_r}{r^2}\right),$$

*) $v(r,\ t)=v_\varphi(r,\ t)$; véase la indicación a este problema.

$$\frac{\partial v_\varphi}{\partial t}+v_r\frac{\partial v_\varphi}{\partial r}+\frac{v_\varphi}{r}\frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi}+v_z\frac{\partial v_\varphi}{\partial z}+\frac{v_z v_\varphi}{r}=$$
$$=-\frac{1}{\rho r}\frac{\partial p}{\partial \varphi}+\nu\left(\frac{\partial^2 v_\varphi}{\partial r^2}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 v_\varphi}{\partial \varphi^2}+\frac{\partial^2 v_\varphi}{\partial z^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial v_\varphi}{\partial r}+\frac{2}{r^3}\frac{\partial v_z}{\partial \varphi}-\frac{v_\varphi}{r^2}\right),$$
$$\frac{\partial v_z}{\partial t}=v_r\frac{\partial v_z}{\partial r}+\frac{v_\varphi}{r}\frac{\partial v_z}{\partial \varphi}+v_z\frac{\partial v_z}{\partial z}=$$
$$=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z}+\nu\left(\frac{\partial^2 v_z}{\partial r^2}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 v_z}{\partial \varphi^2}+\frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial v_z}{\partial r}\right);$$

2) la ecuación de continuidad es

$$\frac{\partial v_r}{\partial r}+\frac{1}{r}\frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi}+\frac{\partial v_z}{\partial z}+\frac{v_r}{r}=0,$$

donde v_r, v_φ, v_z son los vectores componentes de la velocidad en el sentido de los vectores unitarios de las coordenadas del sistema cilíndrico;

3) las componentes del tensor de las tensiones son

$$\sigma_r=-p+2\nu\frac{\partial v_r}{\partial r},\qquad \tau_{r\varphi}=\nu\left(\frac{1}{r}\frac{\partial v_r}{\partial \varphi}+\frac{\partial v_\varphi}{\partial r}-\frac{y_\varphi}{r}\right),$$
$$\sigma_\varphi=-p+2\nu\left(\frac{1}{r}\frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi}+\frac{v_r}{r}\right),\quad \tau_{\varphi z}=\nu\left(\frac{\partial v_\varphi}{\partial z}+\frac{1}{r}\frac{\partial v_z}{\partial \varphi}\right),$$
$$\sigma_z=-p+2\nu\frac{\partial v_z}{\partial z},\qquad \tau_{zr}=\nu\left(\frac{\partial v_z}{\partial r}+\frac{\partial v_r}{\partial z}\right).$$

Las componentes del tensor de las tensiones en las coordenadas cilíndricas se determinan análogamente a como se hace en las coordenadas cartesianas al deducir la ecuación del movimiento del medio elástico en el problema 11 del § 1 del cap. VI.

8. *Resolución.* Colocamos el origen de las coordenadas sobre la base impermeable y dirigimos el eje z verticalmente hacia arriba. Sea que en las proyecciones sobre los ejes de las coordenadas los vectores f, V, U se escriben en la forma $f=\{f_x, f_y, f_z\}$, $V=\{V_x, V_y, V_z\}$, $U=\{u, v, w\}$. Entonces la ecuación del movimiento de las partículas de las aguas subterráneas se puede escribir en la forma

$$\rho\frac{dV_x}{dt}=-\frac{\partial p}{\partial x}+g\rho f_x,\quad \rho\frac{dV_y}{dt}=$$
$$=-\frac{\partial p}{\partial y}+g\rho f_y,\quad \rho\frac{dV_z}{dt}=-\frac{\partial p}{\partial z}+g\rho f_z-g\rho,$$

donde p es la presión en las aguas subterráneas. Despreciando (en virtud del supuesto 2) de la enunciación del problema), las fuerzas de inercia, y utilizando $f=-\frac{1}{k}U$, obtenemos de estas ecuaciones las ecuaciones aproximadas

$$u=-\frac{k}{g\rho}\frac{\partial p}{\partial x},\quad v=-\frac{k}{g\rho}\frac{\partial p}{\partial y},\quad w=-k\left(\frac{1}{g\rho}\frac{\partial p}{\partial z}+1\right), \tag{1}$$

que se pueden escribir en forma vectorial del modo siguiente:

$$U=-k\,\mathrm{grad}\,H, \tag{2}$$

donde

$$H(x, y, z, t) = \frac{p - p_0}{g\rho} + z, \tag{3}$$

p_0 es la presión sobre la superficie libre de las aguas subterráneas (que no depende de x, y, z).

Sea que p_1 significa la presión hidrostática en el punto que está a la altura z por encima de la base impermeable, y $z = H_0(x, y, t)$ es la ecuación de la superficie libre de las aguas subterráneas; entonces para la presión hidrostática obtenemos la expresión siguiente:

$$p_1 - p_0 = g\rho\,[H_0(x, y, t) - z], \quad 0 \leqslant z \leqslant H_0(x, y, t),$$

es decir,

$$\frac{p_1 - p_0}{g\rho} + z = H_0(x, y, t). \tag{4}$$

De (3) y (4) hallamos para la presión excesiva la expresión siguiente:

$$\frac{p - p_0}{g\rho} = H(x, y, z, t) - H_0(x, y, t). \tag{5}$$

En virtud del supuesto 1) de la enunciación del problema de (2), (3) y (5) se deduce:

$$u = -k\,\frac{\partial H_0}{\partial x}, \quad v = -k\,\frac{\partial H_0}{\partial y}, \tag{6}$$

es decir, las partículas de las aguas subterráneas situadas sobre una vertical tienen velocidades horizontales iguales.

Examinando el prisma vertical fino con la base $\Delta x \Delta y$ y la altura $H_0(x, y, t)$ y utilizando la relación (6), la ecuación de continuidad se puede escribir en la forma

$$\frac{\partial H_0}{\partial t} = \frac{k}{m}\left\{\frac{\partial}{\partial x}\left(H_0\,\frac{\partial H_0}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(H_0\,\frac{\partial H_0}{\partial y}\right)\right\}. \tag{7}$$

Si la capa del suelo y la capa de las aguas subterráneas encima de la base impermeable se extiende «infinitamente», entonces el problema de contorno para determinar el movimiento de la superficie libre de las aguas subterráneas se puede formular del modo siguiente:

$$\frac{\partial H_0}{\partial t} = -\frac{k}{m}\left\{\frac{\partial}{\partial x}\left(H_0\,\frac{\partial H_0}{\partial x}\right) + \right.$$

$$\left. + \frac{\partial}{\partial y}\left(H_0\,\frac{\partial H_0}{\partial y}\right)\right\}, \quad -\infty < x, y < +\infty, \quad 0 < t < +\infty, \tag{8}$$

$$H_0(x, y, 0) = \varphi(x, y), \quad -\infty < x, y < +\infty. \tag{9}$$

Observación. Frecuentemente de la ecuación no lineal (7) se pasa a la ecuación lineal

$$\frac{\partial H_0}{\partial t} = a^2\left(\frac{\partial^2 H_0}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 H_0}{\partial y^2}\right), \quad a^2 = \frac{kh_0}{m}, \tag{7'}$$

sustituyendo el factor H_0 entre las paréntesis que están en el segundo miembro de la ecuación (7) por la altura media $h_0 = \text{const}$ de la superficie libre de las aguas subterráneas.

§ 2. El método de separación de variables

1. Problemas de contorno que no exigen la utilización de las funciones especiales

a) Medios homogéneos

9. La solución del problema de contorno

$$\frac{\partial u}{\partial t}=a^2\left\{\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right\},\quad 0<x<l_1,\ \ 0<y<l_2,\ \ 0<z<l_3,$$
$$0<t<+\infty, \quad (1)$$

$$u|_{x=0}=u|_{x=l_1}=u|_{y=0}=u|_{y=l_2}=u|_{z=0}=u|_{z=l_3}=0,\quad 0<t<+\infty, \quad (2)$$

$$u|_{t=0}=f(x,\ y,\ z),\quad 0<x<l_1,\ \ 0<y<l_2,\ \ 0<z<l_3 \quad (3)$$

es

$$u(x,\ y,\ z,\ t)=\sum_{k,\ m,\ n=1}^{+\infty} A_{k,\ m,\ n}\, e^{-a^2\pi^2\left(\frac{k^2}{l_1^2}+\frac{m^2}{l_2^2}+\frac{n^2}{l_3^2}\right)t}\operatorname{sen}\frac{k\pi x}{l_1}\times$$
$$\times\operatorname{sen}\frac{m\pi y}{l_2}\operatorname{sen}\frac{n\pi z}{l_3}, \quad (4)$$

donde

$$A_{k,\ m,\ n}=\frac{8}{l_1 l_2 l_3}\int_0^{l_1}d\xi\int_0^{l_2}d\eta\int_0^{l_3}f(\xi,\ \eta,\ \zeta)\times$$
$$\times\operatorname{sen}\frac{k\pi\xi}{l_1}\operatorname{sen}\frac{m\pi\eta}{l_2}\operatorname{sen}\frac{n\pi\zeta}{l_3}\,d\zeta. \quad (5)$$

10. $u(x,\ y,\ z,\ t)=$

$$=\left(\frac{4}{\pi}\right)^3 U_0\sum_{k,\ m,\ n=0}^{+\infty}\frac{e^{-\frac{a^2\pi^2}{l^2}[(2k+1)^2+(2m+1)^2+(2n+1)^2]\,t}}{(2k+1)(2m+1)(2n+1)}\times$$
$$\times\operatorname{sen}\frac{(2k+1)\pi x}{l}\operatorname{sen}\frac{(2m+1)\pi y}{l}\operatorname{sen}\frac{(2n+1)\pi z}{l}. \quad (1)$$

En el centro del cubo

$$u\left(\frac{l}{2},\ \frac{l}{2},\ \frac{l}{2},\ t\right)=U_0\left(\frac{4}{\pi}\right)^3\left\{\sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^k\frac{e^{-\frac{a^2\pi^2(2k+1)^2}{l^2}t}}{2k+1}\right\}^3. \quad (2)$$

Para todos los t que satisfacen la desigualdad

$$t\geqslant t^*=-\frac{l^2}{8\pi^2a^2}\ln 3\tilde{\varepsilon}, \quad (3)$$

donde $\tilde{\varepsilon}$ es menor que el mínimo de los números 1 y $\frac{\varepsilon}{9}$, en el centro del cubo a ciencia cierta tendrá lugar el régimen regular con la exactitud relativa ε.

Indicación. Indicamos con α el primer término de la serie que está entre las llaves de la igualdad (2) y por S la suma de todos sus términos restantes. Para

todos los t que satisfacen la desigualdad (3) se tendrá*):

$$\left|\frac{S}{\alpha}\right| < \tilde{\varepsilon}; \tag{4}$$

dado que $\tilde{\varepsilon} < 1$ y $\tilde{\varepsilon} < \frac{\varepsilon}{9}$, resulta:

$$\left|\frac{3\alpha^2 S + 3\alpha S^2 + S^3}{\alpha^3}\right| \leqslant 3\left|\frac{S}{\alpha}\right|\left\{1 + \left|\frac{S}{\alpha}\right| + \frac{1}{3}\left|\frac{S}{\alpha}\right|^2\right\} < 9\left|\frac{S}{\alpha}\right| < \varepsilon, \tag{5}$$

es decir, en el centro del cubo tendrá lugar el régimen regular con la exactitud relativa ε.

11. La solución del problema de contorno

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2\left\{\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right\}, \quad 0 < x < l_1, \quad 0 < y < l_2,$$
$$0 < z < l_3, \quad 0 < t + \infty, \tag{1}$$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x} - hu\right)\Big|_{x=0} = \left(\frac{\partial u}{\partial x} + hu\right)\Big|_{x=l_1} = \left(\frac{\partial u}{\partial y} - hu\right)\Big|_{y=0} =$$
$$= \left(\frac{\partial u}{\partial y} + hu\right)\Big|_{y=l_2} = \left(\frac{\partial u}{\partial z} - hu\right)\Big|_{z=0} = \left(\frac{\partial u}{\partial z} + hu\right)_{z=l_3} = 0, \quad 0 < t < +\infty, \tag{2}$$

$$u(x, y, z, 0) = f(x, y, z), \quad 0 < x < l_1, \quad 0 < y < l_2, \quad 0 < z < l_3, \tag{3}$$

es

$$u(x, y, z, t) = \sum_{k, m, n=1}^{+\infty} A_{k, m, n} e^{-a^2(\lambda_k^2 + \mu_m^2 + \nu_n^2)t} X_k(x) Y_m(y) z_n(z), \tag{4}$$

donde

$$A_{k, m, n} = \frac{8\lambda_k^2 \mu_m^2 \nu_n^2 \int_0^{l_1}\int_0^{l_2}\int_0^{l_3} f(x, y, z) X_k(x) Y_m(y) Z_n(z)\, dx\, dy\, dz}{[l_1(\lambda_k^2 + h^2) + 2h]\cdot[l_2(\mu_m^2 + h^2) + 2h]\cdot[l_3(\nu_n^2 + h^2) + 2h]}, \tag{5}$$

$\lambda_1, \lambda_2, \ldots; \mu_1, \mu_2, \ldots; \nu_1, \nu_2, \ldots$ son respectivamente las raíces positivas de las ecuaciones

$$\operatorname{ctg} l_1\lambda = \frac{1}{2}\left(\frac{\lambda}{h} - \frac{h}{\lambda}\right), \quad \operatorname{ctg} l_2\mu =$$
$$= \frac{1}{2}\left(\frac{\mu}{h} - \frac{h}{\mu}\right), \quad \operatorname{ctg} l_3\nu = \frac{1}{2}\left(\frac{\nu}{h} - \frac{h}{\nu}\right), \tag{6}$$

$$X_k(x) = \cos\lambda_k x + \frac{h}{\lambda_k}\operatorname{sen}\lambda_k x, \quad Y_m(y) = \cos\mu_m y + \frac{h}{\mu_m}\operatorname{sen}\mu_m y,$$
$$Z_n(z) = \cos\nu_n z + \frac{h}{\nu_n}\operatorname{sen}\nu_n z. \tag{7}$$

---

* Para más detalles véase en el cap. III, § 2, la respuesta al problema 22.

En particular, si $f(x, y, z) = U_0 \equiv \text{const}$, entonces

$$u(x, y, z, t) = 4^3 h^3 U_0 \sum_{k, m, n=0}^{+\infty} e^{-a^2(\lambda_{2k+1}^2 + \mu_{2m+1}^2 + \nu_{2n+1}^2)t} \times$$

$$\times \frac{X_{2k+1}(x) Y_{2m+1}(y) Z_{2n+1}(z)}{[l_1(\lambda_{2k+1}^2 + h^2) + 2h] \cdot [l_2(\mu_{2m+1}^2 + h^2) + 2h] \cdot [l_3(\nu_{2n+1}^2 + h^2) + 2h]}. \tag{8}$$

Indicación. Las raíces λ_k de la ecuación $\operatorname{ctg} l_1\lambda = \frac{1}{2}\left(\frac{\lambda}{h} - \frac{h}{\lambda}\right)$ satisfacen las desigualdades $0 < \lambda_1 l_1 < \pi$, $\pi < \lambda_2 l_1 < 2\pi$, $2\pi < \lambda_3 l_1 < 3\pi$, ..., es decir las desigualdades

$$0 < \frac{\lambda_1 l_1}{2} < \frac{\pi}{2}, \quad \frac{\pi}{2} < \frac{\lambda_2 l_1}{2} < \pi, \quad \pi < \frac{\lambda_3 l_1}{2} < \frac{3\pi}{2}, \ldots \tag{9}$$

Sustituyendo λ_k en la ecuación $\operatorname{ctg} l_1\lambda = \frac{1}{2}\left(\frac{\lambda}{h} - \frac{h}{\lambda}\right)$, escribimos el resultado en la forma

$$\operatorname{tg} \lambda_k l_1 = \frac{2\lambda_k h}{\lambda_k^2 - h^2} = \frac{2\frac{h}{\lambda_k}}{1 - \frac{h^2}{\lambda_k^2}} = -\frac{2\frac{\lambda k}{h}}{1 - \frac{\lambda_k^2}{h^2}}. \tag{10}$$

En virtud de (9) $\operatorname{tg}\frac{\lambda_k l_1}{2} > 0$ para k impar y es menor que cero para k par. Pero

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{2\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}}{1 - \operatorname{tg}^2\frac{\beta}{2}},$$

por eso de (10) se deduce que

$$\operatorname{tg}\frac{\lambda_k l_1}{2} = \begin{cases} \frac{h}{\lambda_k} & \text{para } k \text{ impar}, \\ -\frac{\lambda_k}{h} & \text{para } k \text{ par}. \end{cases}$$

Por consiguiente,

$$\int_0^{l_1} X_k(x)\,dx = \frac{1}{\lambda_k}\left[\operatorname{sen}\lambda_k l_1 + \frac{h}{\lambda_k}(1 - \cos\lambda_k l_1)\right] =$$

$$= \frac{1}{\lambda_k} 2 \operatorname{sen}\frac{\lambda_k l_1}{2} \cos\frac{\lambda_k l_1}{2}\left[1 + \frac{h}{\lambda_k}\operatorname{tg}\frac{\lambda_k l_1}{2}\right] =$$

$$= \frac{2}{\lambda_k} \cdot \frac{\operatorname{tg}\frac{\lambda_k l_1}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2\frac{\lambda_k l_1}{2}}\left[1 + \frac{h}{\lambda_k}\operatorname{tg}\frac{\lambda_k l_1}{2}\right] = \begin{cases} 0 & \text{para } k \text{ par}, \\ \frac{2h}{\lambda_k^2} & \text{para } k \text{ impar}. \end{cases}$$

Análogamente se calculan $\int_0^{l_2} Y_m(y)\,dy$, $\int_0^{l_3} Z_n(z)\,dz$.

Observación. Si el paralelepípedo en el momento inicial de tiempo está calentado uniformemente (es decir, $f(x, y, z) = U_0 = \text{const}$), entonces, evidentemente, la distribución de la temperatura en él será simétrica con respecto a los planos $x = \frac{l_1}{2}$, $y = \frac{l_2}{2}$, $z = \frac{l_3}{2}$, por eso se puede limitarse a determinar la temperatura en uno de los ocho paralelepípedos en que estos planos parten el paralelepípedo inicial.

12. La temperatura en el centro del cubo $-l \leqslant x, y, z \leqslant l$ es igual a

$$U = 8U_0h^3\left\{\sum_{k=0}^{+\infty} e^{-a^2\lambda_k^2 t}(-1)^k \frac{\sqrt{1+\frac{h^2}{\lambda_k^2}}}{l(\lambda_k^2+h^2)+h}\right\}^3, \qquad (1)$$

dondo λ_0, λ_1 λ_2, ... son las raíces positivas de la ecuación

$$\operatorname{tg}\lambda l = \frac{h}{\lambda}. \qquad (2)$$

Para todas las magnitudes de tiempo t que satisfacen la desigualdad

$$t \geqslant t^* = -\frac{1}{a^2(\lambda_1^2-\lambda_0^2)}\ln\left[\tilde{\varepsilon}\,\frac{(hl)^2+hl+(l\lambda_1)^2}{(hl)^2+hl+(l\lambda_0)^2}\sqrt{\frac{1+\left(\frac{h}{\lambda_0}\right)^2}{1+\left(\frac{\lambda}{h_1}\right)^2}}\right], \qquad (3)$$

donde $\tilde{\varepsilon}$ es el mínimo de los números 1 y $\frac{\varepsilon}{9}$, en el centro del cubo a ciencia cierta tendrá lugar el régimen regular con la exactitud relativa ε.

Indicación. A fin de obtener la expresión (1) para la temperatura en el centro del cubo $-l \leqslant x, y, z \leqslant l$ es suficiente, de acuerdo con la observación al problema anterior, con hallar primero la temperatura de la parte $0 \leqslant x, y, z \leqslant l$ de este cubo, considerando que los planos $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ son termoaislados.

Sobre la determinación del momento desde que, a ciencia cierta, tendrá lugar el régimen regular con la exactitud relativa $\varepsilon > 0$ véase la respuesta y la indicación al problema 10 de este capítulo y la respuesta y la indicación al problema 29 del cap. III.

13. La solución del problema de contorno

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{a^2}{v_0}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right), \quad 0 < x < +\infty, \quad 0 < y < l_1, \quad 0 < z < l_2, \qquad (1)$$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial y} - hu\right)\Big|_{y=0} = \left(\frac{\partial u}{\partial y} + hu\right)\Big|_{y=l_1} = \left(\frac{\partial u}{\partial z} - hu\right)\Big|_{z=0} = \left(\frac{\partial u}{\partial z} + hu\right)\Big|_{z=l_2} = 0,$$

$$0 < x < +\infty, \qquad (2)$$

$$u|_{x=0} = U_0, \quad 0 \leqslant y \leqslant l_1, \quad 0 \leqslant z \leqslant l_2 \qquad (3)$$

es:

$$u(x, y, z) = 16 U_0 h^2 \sum_{m, n=0}^{+\infty} e^{-\frac{a^2}{v_0^2}(\mu_{2m+1}^2 + \nu_{2n+1}^2)x} \times$$

$$\times \frac{\left(\cos \mu_{2m+1} y + \frac{h}{\mu_{2m+1}} \operatorname{sen} \mu_{2m+1} y\right) \left(\cos \nu_{2n+1} z + \frac{h}{\nu_{2n+1}} \operatorname{sen} \nu_{2n+1} z\right)}{[l_1 (\mu_{2m+1}^2 + h^2) + 2h] \cdot [l_2 (\nu_{2n+1}^2 + h^2) + 2h]}$$

donde $\mu_1, \mu_2, \ldots; \nu_1, \nu_2, \ldots$ son respectivamente las soluciones de las ecuaciones

$$\operatorname{ctg} l_1 \mu = \frac{1}{2}\left(\frac{\mu}{h} - \frac{h}{\mu}\right), \quad \operatorname{ctg} l_2 \nu = \frac{1}{2}\left(\frac{\nu}{h} - \frac{h}{\nu}\right).$$

Indicación. Véase la indicación al problema 11.

14. a) $l_{\text{cr.}} = a\pi \sqrt{\frac{3}{\beta}}$;

b) el proceso de carácter de avalancha de la multiplicación de las partículas tendrá lugar para cualquier dimensión del cubo;

c) $l_{\text{cr.}} = \frac{a\sqrt{3}}{\beta} \operatorname{arcctg} \frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{\beta}}{ah\sqrt{3}} - \frac{ah\sqrt{3}}{\sqrt{\beta}}\right)$, si

$\beta > 3a^2h^2$; el proceso de carácter de avalancha será para cualquier dimensión, si $\beta \leqslant 3a^2h^2$; β es el coeficiente de la multiplicación que entra en la ecuación

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right) + \beta u.$$

15. $$u(r, t) = \sum_{n=1}^{+\infty} A_n e^{-\frac{n^2\pi^2 a^2}{r_0^2} t} \frac{\operatorname{sen} \frac{n\pi r}{r_0}}{r}, \tag{1}$$

$$A_n = \frac{2}{r_0} \int_0^{r_0} r f(r) \operatorname{sen} \frac{n\pi r}{r_0} dr. \tag{2}$$

Indicación. La ecuación de la conductibilidad térmica en virtud de la simetría radial se escribe en la forma

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \left\{\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial u}{\partial r}\right\}.$$

El paso a la nueva función incógnita $v(r, t) = ru(r, t)$ conduce al problema de contorno sobre el enfriamiento de la barra

$$\frac{\partial v}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 v}{\partial r^2}, \quad 0 < r < r_0, \quad 0 < t < +\infty, \tag{3}$$

$$v(0, t) = 0, \quad v(r_0, t) = 0, \quad 0 < t < +\infty, \tag{4}$$

$$v(r, 0) = rf(r), \quad 0 < r < r_0. \tag{5}$$

La primera de las condiciones de frontera (4) es consecuencia de la acotación de la temperatura $u(r, t)$ en el centro de la esfera

$$u(+0, t) = \lim_{r \to +0} ru(r, t) = 0.$$

16. $$u(r, t) = U_1 + 2\frac{r_0}{\pi}(U_0 - 1)\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}e^{-\frac{n^2\pi^2a^2}{r_0^2}t}\frac{\operatorname{sen}\frac{n\pi r}{r_0}}{r}.$$

Para todos valores de tiempo t que satisfacen la desigualdad

$$t \geqslant t^* = -\frac{r_0^2}{3\pi^2 a^2}\ln\varepsilon,$$

en el centro de la esfera tendrá lugar a ciencia cierta el régimen regular con la exactitud relativa $\varepsilon > 0$.

Indicación. Véase la solución del problema 22 del § 2 del cap. III.

17. La solución del problema de contorno

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2\left\{\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial u}{\partial r}\right\}, \quad 0 \leqslant r < r_0, \quad 0 < t < +\infty, \tag{1}$$

$$\lambda\frac{\partial u}{\partial r} = q, \quad r = r_0, \quad 0 < t < +\infty, \tag{2}$$

$$u(r, 0) = U_0, \quad 0 \leqslant r \leqslant r_0. \tag{3}$$

es:

$$u(r, t) = U_0 + \frac{qr_0}{\lambda}\left\{\frac{3a^2t}{r_0^2} - \frac{3r_0^2 - 5r^2}{10r_0^2} - \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2r_0e^{-\frac{a^2\mu_n^2 t}{r_0^2}}}{\mu_n^2\cos\mu_n}\cdot\frac{\operatorname{sen}\frac{\mu_n r}{r_0}}{r}\right\}, \tag{4}$$

donde μ_n son las raíces positivas de la ecuación

$$\operatorname{tg}\mu = \mu. \tag{5}$$

18. La solución del problema de contorno

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2\left\{\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial u}{\partial r}\right\}, \quad 0 \leqslant r < r_0, \quad 0 < t < +\infty, \tag{1}$$

$$\frac{\partial u}{\partial r} + hu = 0 \quad \text{para} \quad r = r_0 \quad 0 < t < +\infty, \tag{2}$$

$$u(r, 0) = f(r), \quad 0 \leqslant r < r_0 \tag{3}$$

es:

$$u(r, t) = \sum_{n=1}^{+\infty} A_n e^{-a^2\lambda_n^2 t}\frac{\operatorname{sen}\lambda_n r}{r}, \tag{4}$$

donde

$$A_n = \frac{2}{r_0}\cdot\frac{r_0^2\lambda_n^2 + (r_0h - 1)^2}{r_0^2\lambda_n^2 + (r_0h - 1)r_0h}\int_0^{r_0} rf(r)\operatorname{sen}\lambda_n r\,dr, \tag{5}$$

λ_n son las raíces positivas de la ecuación

$$\operatorname{tg} \lambda_n r_0 = \frac{\lambda_n r_0}{1 - r_0 h}. \tag{6}$$

19. $u(r, t) = U_1 +$

$$+ 2(U_1 - U_0) h r_0^2 \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \frac{\sqrt{\mu_n^2 + (hr_0 - 1)^2}}{\mu_n (\mu_n^2 + h^2 r_0^2 - hr_0)} e^{-\frac{a^2 \mu_n^2 t}{r_0^2}} \frac{\operatorname{sen} \frac{\mu_n r}{r_0}}{r}, \tag{1}$$

donde μ_n son las raíces positivas de la ecuación

$$\operatorname{tg} \mu = -\frac{\mu}{r_0 h - 1}, \tag{2}$$

y h, el coeficiente del intercambio de calor que entra en la condición de frontera

$$\frac{\partial u}{\partial r} = h [U_1 - u] \quad \text{para} \quad r = r_0, \quad 0 < t < +\infty. \tag{3}$$

En el centro de la esfera

$$u(0, t) = U_1 + 2(U_1 - U_0) h r_0 \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \frac{\sqrt{\mu_n^2 + (hr_0 - 1)^2}}{\mu_n^2 + h^2 r_0^2 - hr_0} e^{-\frac{a^2 \mu_n^2 t}{r_0^2}}. \tag{4}$$

Si $hr_0 < 1$, entonces, evidentemente, la serie (4) satisface las condiciones del teorema de Leibniz sobre las series de términos de signo variable. Utilizando esto, hallamos que para todos valores de tiempo t que satisfacen la desigualdad

$$t \geqslant t^* = -\frac{r_0^2}{a^2 (\mu_1^2 - \mu_2^2)} \ln \left\{ \varepsilon \frac{\mu_2^2 + h^2 r_0^2 - hr_0}{\mu_1^2 + h^2 r_0^2 - hr_0} \sqrt{\frac{\mu_1^2 + (hr_0 - 1)^2}{\mu_2^2 + (hr_0 - 1)^2}} \right\}, \tag{5}$$

en el centro de la esfera tendrá lugar a ciencia cierta el régimen regular con la exactitud relativa $\varepsilon > 0$.

20. La solución del problema de contorno

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \left\{ \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial u}{\partial r} \right\}, \quad 0 \leqslant r < r_0, \quad 0 < t < +\infty, \tag{1}$$

$$\left. \frac{\partial u}{\partial r} \right|_{r=r_0} = h [U_1 + \alpha t - u] \Big|_{r=r_0}, \quad 0 < t < +\infty, \tag{2}$$

$$u(r, 0) = U_0, \quad 0 \leqslant r < r_0, \tag{3}$$

es:

$$u(r, t) = U_0 + \alpha \left[t + \frac{r^2 - r_0^2 - 2\frac{r_0}{h}}{6a^2} \right] +$$

$$+ \frac{2hr_0^4 \alpha}{a^2} \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \frac{\sqrt{\mu_n^2 + (hr_0 - 1)^2}}{\mu_n^3 (\mu_n^2 + h^2 r_0^2 - hr_0)} e^{-\frac{a^2 \mu_n^2 t}{r_0^2}} \frac{\operatorname{sen} \frac{\mu_n r}{r_0}}{r} \tag{4}$$

donde μ_n son las raíces positivas de la ecuación

$$\operatorname{tg} \mu = \frac{\mu}{hr_0 - 1}. \tag{5}$$

Indicación. Primero se debe hallar la solución particular de la ecuación (1) que satisface la condición heterogénea de frontera (2). Tal solución particular se puede buscar en la forma $U(r, t) = U_1 + \alpha t + F(r)$, donde $F(r)$ es una función incógnita.

21. La solución del problema de contorno

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \left\{ \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial u}{\partial r} \right\} r_1 < r < r_2, \; 0 < t < +\infty, \tag{1}$$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial r} - h_1 u \right) \Big|_{r=r_1} = 0, \quad \left(\frac{\partial u}{\partial r} + h_2 u \right) \Big|_{r=r_2} = 0, \quad 0 < t < +\infty, \tag{2}$$

$$u(r, 0) = f(r), \quad r_1 < r < r_2, \tag{3}$$

es:

$$u(r, t) = \sum_{n=1}^{+\infty} A_n e^{-a^2 \lambda_n^2 t} \frac{\operatorname{sen}[\lambda_n (r - r_1) + \nu_n]}{r}, \tag{4}$$

donde

$A_n =$

$$= \frac{2 \int\limits_{r_1}^{r_2} r f(r) \operatorname{sen}[\lambda_n (r - r_1) + \nu_n]\, dr}{r_2 - r_1 + \dfrac{\left[\left(h_1 + \frac{1}{r_1} \right) \left(h_2 - \frac{1}{r_2} \right) + \lambda_n^2 \right] \cdot \left[h_1 + h_2 + \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right]}{\left[\left(h_1 + \frac{1}{r_1} \right)^2 + \lambda_n^2 \right] \cdot \left[\left(h_2 - \frac{1}{r_2} \right)^2 + \lambda_n^2 \right]}}, \tag{5}$$

λ_n son las raíces positivas de la ecuación

$$\operatorname{ctg} \lambda_n (r_2 - r_1) = \frac{\lambda_n^2 - \left(h_1 + \frac{1}{r_1} \right) \left(h_2 - \frac{1}{r_2} \right)}{\lambda_n \left(h_1 + h_2 + \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right)}, \tag{6}$$

$$\nu_n = \operatorname{arctg} \frac{\lambda_n}{h_1 + \frac{1}{r_1}}. \tag{7}$$

22. a) $R_{cr} = \dfrac{\pi a}{\sqrt{\beta}}$,

b) el proceso tendrá el carácter de avalancha para cualquier dimensión de la esfera,

c) $R_{cr.}$ es la raíz positiva mínima de la ecuación

$$\operatorname{tg} \left(\frac{\sqrt{\beta}}{a} R \right) = \frac{\frac{\sqrt{\beta}}{a} R}{1 - hR}.$$

b) Medios heterogéneos; factores concentrados

23. La solución del problema de contorno

$$c_1\rho_1 \frac{\partial u}{\partial t} = k_1 \left\{ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right\}, \quad 0 < x < x_0, \quad 0 < y < l_2, \quad 0 < t < +\infty, \tag{1}$$

$$c_2\rho_2 \frac{\partial u}{\partial t} = k_2 \left\{ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right\}, \quad x_0 < x < l_1, \quad 0 < y < l_2, \quad 0 < t < +\infty, \tag{1'}$$

$$u(x_0 - 0, y, t) = u(x_0 + 0, y, t), \quad 0 < y < l_2, \quad 0 < t < +\infty, \tag{2}$$

$$k_1 u_x(x_0 - 0, y, t) = k_2 u_x(x_0 + 0, y, t), \quad 0 < y < l_2, \quad 0 < t < +\infty, \tag{2'}$$

$$u|_{x=0} = u|_{x=l_1} = u|_{y=0} = u|_{y=l_2} = 0, \tag{2''}$$

$$u(x, y, 0) = f(x, y), \quad 0 \leqslant x \leqslant l_1, \quad 0 \leqslant y \leqslant l_2, \tag{3}$$

es:

$$u(x, y, t) = \sum_{m, n=1}^{+\infty} A_{m, n} e^{-\lambda_{m, n}^2 t} v_{m, n}(x, y), \tag{4}$$

donde

$$v_{m, n}(x, y) =$$

$$= \left\{ \begin{array}{ll} \dfrac{\operatorname{sen} \overline{\omega}_{mn} x}{\operatorname{sen} \overline{\omega}_{mn} x_0} \operatorname{sen} \dfrac{n\pi y}{l_2}, & 0 \leqslant x \leqslant x_0, \quad 0 \leqslant y \leqslant l_2, \\ \dfrac{\operatorname{sen} \overline{\overline{\omega}}_{mn} (l_1 - x)}{\operatorname{sen} \overline{\overline{\omega}}_{mn} (l_1 - x_0)} \operatorname{sen} \dfrac{n\pi y}{l_2}, & x_0 \leqslant x \leqslant l_1, \quad 0 \leqslant y \leqslant l_2, \end{array} \right\} \tag{5}$$

$$\overline{\omega}_{mn}^2 = \frac{c_1\rho_1}{k_1} \lambda_{mn}^2 - \frac{n^2\pi^2}{l_2^2}, \qquad \overline{\overline{\omega}}_{mn}^2 = \frac{c_2\rho_2}{k_2} \lambda_{mn}^2 - \frac{n^2\pi^2}{l_2^2}, \tag{6}$$

λ_{mn} ($m = 1, 2, 3, \ldots$; $n = 1, 2, 3, \ldots$) son las raíces de la ecuación trascedente

$$k_1 \sqrt{\frac{c_1\rho_1}{k_1} \lambda_{mn}^2 - \frac{n^2\pi^2}{l_2^2}} \operatorname{ctg} \left\{ x_0 \sqrt{\frac{c_1\rho_1}{k_1} \lambda_{mn}^2 - \frac{n^2\pi^2}{l_2^2}} \right\} =$$

$$= k_2 \sqrt{\frac{c_2\rho_2}{k_2} \lambda_{mn}^2 - \frac{n^2\pi^2}{l_2^2}} \operatorname{ctg} \left\{ (x_0 - l_1) \sqrt{\frac{c_2\rho_2}{k_2} \lambda_{mn}^2 - \frac{n^2\pi^2}{l_2^2}} \right\}, \tag{7}$$

$$A_{m, n} = \frac{\int_0^{l_1} \int_0^{l_2} \mu(x, y) f(x, y) v_{m, n}(x, y)\, dx\, dy}{\| v_{m, n} \|^2} \tag{8}$$

$$\mu(x, y) = \left\{ \begin{array}{lll} c_1\rho_1 & \text{para} & 0 \leqslant x < x_0, \quad 0 \leqslant y \leqslant l_2, \\ c_2\rho_2 & \text{para} & x_0 < x \leqslant l_1, \quad 0 \leqslant y \leqslant l_2, \end{array} \right. \tag{9}$$

$$\| v_{m, n} \|^2 = \int_0^{l_1} \int_0^{l_2} \mu(x, y) v_{m, n}^2(x, y)\, dx\, dy =$$

$$= \frac{l_2}{4} \left\{ \frac{c_1\rho_1 x_0}{\operatorname{sen}^2 \overline{\omega}_{mn} x_0} + \frac{c_2\rho_2 (l_1 - x_0)}{\operatorname{sen}^2 \overline{\overline{\omega}}_{mn} (l_1 - x_0)} \right\}. \tag{10}$$

Las funciones $v_{m, n}$ son ortogonales con respecto al núcleo $\mu(x, y)$ sobre el rectángulo $0 \leqslant x \leqslant l_1$, $0 \leqslant y \leqslant l_2$.

24. La solución del problema de contorno

$$c_1\rho_1 \frac{\partial u}{\partial t} = k_1 \left\{ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right\},$$

$$0 < x < x_0, \quad 0 < y < l_2, \quad 0 < z < l_3, \quad 0 < t < +\infty, \tag{1}$$

$$c_2\rho_2 \frac{\partial u}{\partial t} = k_2 \left\{ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right\},$$

$$x_0 < x < l_1, \quad 0 < y < l_2, \quad 0 < z < l_3, \quad 0 < t < +\infty, \tag{1'}$$

$$u(x_0-0, y, z, t) = u(x_0+0, y, z, t), \quad 0 \leqslant y \leqslant l_2,$$

$$0 < z < l_3, \quad 0 < t < +\infty, \tag{2}$$

$$k_1 u_x(x_0-0, y, z, t) = k_2 u_x(x_0+0, y, z, t),$$

$$0 \leqslant y \leqslant l_2, \quad 0 \leqslant z \leqslant l_3, \quad 0 < t < +\infty, \tag{2'}$$

$$u|_{x=0} = u|_{x=l_1} = u|_{y=0} = u|_{y=l_2} = u|_{z=0} = u|_{z=l_3} = 0, \tag{2''}$$

$$u|_{t=0} = f(x, y, z), \quad 0 \leqslant x \leqslant l_1, \quad 0 \leqslant y \leqslant l_2, \quad 0 \leqslant z \leqslant l_3, \tag{3}$$

es:

$$u(x, y, z, t) = \sum_{m, n, p=1}^{+\infty} A_{m, n, p} e^{-\lambda^2_{m, n, p} t} v_{m, n, p}(x, y, z), \tag{4}$$

donde

$$v_{mnp} = (x, y, z) = \begin{cases} \dfrac{\operatorname{sen} \bar{\omega}_{mnp} x}{\operatorname{sen} \bar{\omega}_{mnp} x_0} \operatorname{sen} \dfrac{n\pi y}{l_2} \operatorname{sen} \dfrac{p\pi z}{l_3}, \\ 0 \leqslant x \leqslant x_0, \quad 0 \leqslant y \leqslant l_2, \quad 0 \leqslant z \leqslant l_3, \\ \dfrac{\operatorname{sen} \bar{\bar{\omega}}_{mnp} (l_1 - x)}{\operatorname{sen} \bar{\bar{\omega}}_{mnp} (l_1 - x_0)} \operatorname{sen} \dfrac{n\pi y}{l_2} \operatorname{sen} \dfrac{p\pi z}{l_3}, \\ x_0 \leqslant x \leqslant l_1, \quad 0 \leqslant y \leqslant l_2, \quad 0 \leqslant z \leqslant l_3, \end{cases} \tag{5}$$

$$\bar{\omega}^2_{m, n, p} = \frac{c_1\rho_1}{k_1} \lambda^2_{m, n, p} - \frac{n^2\pi^2}{l_2^2} - \frac{p^2\pi^2}{l_3^2},$$

$$\bar{\bar{\omega}}^2_{m, n, p} = \frac{c_2\rho_2}{k_2} \lambda^2_{m, n, p} - \frac{n^2\pi^2}{l_2^2} - \frac{p^2\pi^2}{l_3^2}, \tag{6}$$

$\lambda_{m, n, p} = (m = 1, 2, 3, \ldots;\ n = 1, 2, 3, \ldots;\ p = 1, 2, 3, \ldots)$ son las raíces de la ecuación trascedente

$$k_1 \sqrt{\frac{c_1\rho_1}{k_1} \lambda^2_{mnp} - \frac{n^2\pi^2}{l_2^2} - \frac{n^2\pi^2}{l_3^2}} \operatorname{ctg} \times$$

$$\times \left\{ x_0 \sqrt{\frac{c_1\rho_1}{k_1} \lambda^2_{mnp} - \frac{n^2\pi^2}{l_2^2} - \frac{p^2\pi^2}{l_3^2}} \right\} =$$

$$= k_2 \sqrt{\frac{c_2\rho_2}{k_2} \lambda^2_{mnp} - \frac{n^2\pi^2}{l_2^2} - \frac{p^2\pi^2}{l_3^2}} \times$$

$$\times \operatorname{ctg} \left\{ (x_0 - l_1) \sqrt{\frac{c_2\rho_2}{k_2} \lambda^2_{mnp} - \frac{n^2\pi^2}{l_2^2} - \frac{p^2\pi^2}{l_3^2}} \right\}, \tag{7}$$

$$A_{m,n,p}=\frac{\int\limits_0^{l_1}\int\limits_0^{l_2}\int\limits_0^{l_3}\mu(x,y,z)f(x,y,z)v_{m,n,p}(x,y,z)\,dx\,dy\,dz}{\|v_{m,n,p}\|^2}, \qquad (8)$$

$$\mu(x,y,z)=\begin{cases} c_1\rho_1 & \text{para} \quad 0\leqslant x<x_0, \quad 0\leqslant y<l_2, \quad 0\leqslant z\leqslant l_3, \\ c_2\rho_2 & \text{para} \quad x_0<x\leqslant l_1, \quad 0<y\leqslant l_2, \quad 0\leqslant z\leqslant l_3, \end{cases} \qquad (9)$$

$$\|v(x,y,z)\|^2=\int\limits_0^{l_1}\int\limits_0^{l_2}\int\limits_0^{l_3}\mu(x,y,z)v_{m,n,p}^2(x,y,z)\,dx\,dy\,dz=$$

$$=\frac{l_2l_3}{8}\left\{\frac{c_1\rho_1x_0}{\operatorname{sen}^2\bar{\omega}_{mnp}x_0}+\frac{c_2\rho_2(l_1-x_0)}{\operatorname{sen}^2\bar{\bar{\omega}}_{mnp}(l_1-x_0)}\right\}. \qquad (10)$$

Las funciones $v_{m,n,p}(x,y,z)$ son ortogonales con respecto al núcleo $\mu(x,y,z)$ sobre el paralelepípedo $0\leqslant x\leqslant l_1$, $0\leqslant y\leqslant l_2$, $0\leqslant z\leqslant l_3$.

25. La solución del problema de contorno

$$c_1\rho_1\frac{\partial u}{\partial t}=k_1\left\{\frac{\partial^2u}{\partial r^2}+\frac{2}{r}\frac{\partial u}{\partial r}\right\}, \quad 0\leqslant r<r_0, \quad 0<t<+\infty, \qquad (1)$$

$$c_2\rho_2\frac{\partial u}{\partial t}=k_2\left\{\frac{\partial^2u}{\partial r^2}+\frac{2}{r}\frac{\partial u}{\partial r}\right\}, \quad r_0<r\leqslant r_1, \quad 0<t<+\infty. \qquad (1')$$

$$u(r_0-0,\ t)=u(r_0+0,\ t), \qquad 0<t<+\infty, \qquad (2)$$

$$k_1u_r(r_0-0,\ t)=k_2u_r(r_0+0,\ t), \quad 0<t<+\infty, \qquad (2')$$

$$u(r_1,\ t)=0, \qquad 0<t<+\infty, \qquad (2'')$$

$$u(r,\ 0)=f(r), \quad 0\leqslant r<r_1, \qquad (3)$$

es:

$$u(r,\ t)=\sum_{n=1}^{+\infty}A_ne^{-\lambda_n^2t}v_n(r), \qquad (4)$$

donde λ_n $(n=1,\ 2,\ 3,\ \ldots)$ son las raíces de la ecuación trascedente

$$\sqrt{k_1c_1\rho_1}\operatorname{ctg}\left\{r_0\lambda_n\sqrt{\frac{c_1\rho_1}{k_1}}\right\}-$$

$$-\sqrt{k_2c_2\rho_2}\operatorname{ctg}\left\{(r_0-r_1)\lambda_n\sqrt{\frac{c_2\rho_2}{k_2}}\right\}=\frac{k_1-k_2}{\lambda_nr_0}, \qquad (5)$$

$$v_n(r)=\begin{cases} \dfrac{\operatorname{sen}\bar{\omega}_nr}{r\operatorname{sen}\bar{\omega}_nr_0}, & 0\leqslant r\leqslant r_0, \\ \dfrac{\operatorname{sen}\bar{\bar{\omega}}_n(r_1-r)}{r\operatorname{sen}\bar{\bar{\omega}}_n(r_1-r_0)}, & r_0\leqslant r\leqslant r_1, \end{cases} \qquad (6)$$

$$\bar{\omega}_n=\lambda_n\sqrt{\frac{c_1\rho_1}{k_1}}, \quad \bar{\bar{\omega}}_n=\lambda_n\sqrt{\frac{c_2\rho_2}{k_2}}, \qquad (7)$$

$$A_n=\frac{\int\limits_0^{r_1}\mu(r)f(r)v_n(r)\,dr}{\|v_n\|^2}, \qquad (8)$$

$$\mu(r)=\begin{cases} c_1\rho_1 r^2 & \text{para} \quad 0 \leqslant r < r_0, \\ c_2\rho_2 r^2 & \text{para} \quad r_0 < r \leqslant r_1, \end{cases} \tag{9}$$

$$\| v_n \|^2 = \int_0^{r_1} \mu(r)\, v_n^2(r)\, dr = \frac{c_1\rho_1 r_0}{2\,\text{sen}^2\,\bar{\omega}_n r_0} + \frac{c_2\rho_2 (r_1-r_0)}{2\,\text{sen}^2\,\bar{\bar{\omega}}_n (r_1-r_0)} + \frac{k_2-k_1}{\lambda_n r_0}.$$

Las funciones $v_n(r)$ son ortogonales con respecto al núcleo $\mu(r)$ sobre el segmento $0 \leqslant r \leqslant r_1$.

26. La solución del problema de contorno

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \left\{ \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial u}{\partial r} \right\}, \quad r_1 < r < r_2, \quad 0 < t < +\infty, \tag{1}$$

$$\frac{4}{3}\pi r_1^3 \rho^* c^* \frac{dU}{dt} = 4\pi r_1^2 \lambda \left.\frac{\partial u}{\partial r}\right|_{r=r_1},$$

$$u|_{r=r_1} = U(t), \quad u|_{r=r_2} = 0, \quad 0 < t < +\infty, \tag{2}$$

$$u(r, 0) = f(r), \quad r_1 < r < r_2, \tag{3}$$

donde ρ^* y c^* son la densidad de masa y el calor específico del líquido, resulta:

$$u(r, t) = \sum_{n=1}^{+\infty} A_n e^{-a^2\lambda_n^2 t} \frac{\text{sen}\,\lambda_n (r-r^2)}{r}, \quad r_1 < r < r_2, \quad 0 < t < +\infty, \tag{4}$$

donde λ_n son las raíces de la ecuación

$$\text{ctg}\,\lambda_n (r_2 - r_1) = \frac{a^2 r_1 \lambda_n^2 - 3\lambda}{3\lambda\lambda_n}, \tag{5}$$

$$A_n = \frac{2\int_{r_1}^{r_2} r f(r)\,\text{sen}\,\lambda_n (r-r_2)\, dr}{r_2 - \left[r_1 \left(\frac{a^2\lambda_n r_1 \rho^* c^*}{3\lambda} - \frac{1}{\lambda_n r_1} \right)^2 + \lambda_n^2 + \frac{2a^2 r_1 \rho^* c^*}{3\lambda} \right] \text{sen}^2\,\lambda_n (r_1 - r_2)}. \tag{6}$$

Indicación. Mediante la sustitución $v(r, t) = ru(r, t)$ el problema (1), (2), (3) se reduce al problema sobre el enfriamiento del segmento con la capacidad concentrada en el extremo, y que se resuelve análogamente a como se hizo en el cap. III (véase el problema 50).

2. Problemas de contorno que exigen la utilización de funciones especiales

a) Medios homogéneos

27.
$$u(r, t) = U_0 \left[1 - 2 \sum_{n=1}^{+\infty} e^{-\frac{\mu_n^2 a^2}{r_0^2} t} \frac{J_0\left(\frac{\mu_n r}{r_0}\right)}{\mu_n J_1(\mu_n)} \right],$$

$$0 \leqslant r \leqslant r_0, \quad 0 < t < +\infty, \tag{1}$$

donde r_0 es el radio del cilindro y μ_n, las raíces positivas de la ecuación $J_0(\mu) = 0$.

En las condiciones del régimen regular, es decir, para valores tan grandes de t que la suma de los términos de la serie (1) que corresponden a μ_2, μ_3, ... es despreciablemente pequeña en comparación con el primer término*)

$$u(r, t) \approx U_0 \left[1 - \frac{2J_0\left(\frac{\mu_1 r_0}{r_0}\right)}{\mu_1 J_1(\mu_1)} e^{-\frac{\mu_1^2 a^2}{r_0^2} t}\right], \quad 0 \leqslant r \leqslant r_0, \tag{2}$$

la temperatura media sobre la sección transversal es

$$U(t) \approx U_0 \left[1 - \frac{4}{\mu_1^2} e^{-\frac{\mu_1^2 a^2}{r_0^2} t}\right]. \tag{3}$$

Observación. En los puntos con coordenada $r_1 = \frac{\mu_1}{\mu_2}$ el régimen regular llega antes, debido a que en estos puntos se anula el término de la serie (1) que corresponde a μ^2.

28. $u(r, t) = 8U_0 \sum_{n=1}^{+\infty} e^{-\frac{\mu_n^2 a^2}{r_0^2} t} \frac{J_0\left(\frac{\mu_n r}{r_0}\right)}{\mu_n^3 J_1(\mu_n)}$, donde μ_n son las raíces positivas de la ecuación $J_0(\mu) = 0$. En las condiciones del régimen regular

$$u(r, t) \approx 8U_0 \frac{J_0\left(\frac{\mu_1 r}{r_0}\right)}{\mu_1^3 J_1(\mu_1)} e^{-\frac{\mu_1^2 a^2}{r_0^2} t}.$$

la temperatura media sobre la sección transfersal es

$$U(t) \approx \frac{16U_0}{\mu_1^4} e^{-\frac{\mu_1^2 a^2}{r_0^2} t}.$$

Observación. El régimen regular llega antes en los mismos puntos que en el problema anterior (véase la observación a la respuesta al problema anterior).

29. La solución del problema de contorno

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \left\{\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r}\right\}, \quad 0 \leqslant r < r_0, \quad 0 < t < +\infty, \tag{1}$$

$$\lambda \frac{\partial u}{\partial r} = q \quad \text{para} \quad r = r_0, \quad 0 < t < +\infty, \tag{2}$$

$$u(r, 0) = U_0, \quad 0 \leqslant r \leqslant r_0, \tag{3}$$

---

*) Recordemos que para las raíces de la ecuación $J_0(\mu) = 0$ tiene lugar la representación

$$\mu_n = \pi \left(n - \frac{1}{4} + \frac{0,05661}{4n-1} - \frac{0,053041}{(4n-1)^2} + \ldots\right),$$

de modo que

$$\mu_1 \approx 2,4048, \quad \mu_2 \approx 5,5201, \quad \mu_3 \approx 8,6537, \ldots$$

Los valores de $J_1(\mu_n)$ véanse en [7], pág. 394.

es:

$$u(r,\ t)=U_0+\frac{qr_0}{\lambda}\left[2\,\frac{a^2t}{r_0^2}-\frac{1}{4}\left(1-2\,\frac{r^2}{r_0^2}\right)-\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2e^{-\frac{a^2\mu_n^2}{r_0^2}t}}{\mu_n^2J_0(\mu_n)}\,J_0\left(\frac{\mu_n r}{r_0}\right)\right], \qquad (4)$$

donde μ_n son las raíces de la ecuación trascedente

$$J_0'(\mu)=0. \qquad (5)$$

30. La solución del problema de contorno

$$\frac{\partial u}{\partial t}=a^2\left\{\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\,\frac{\partial u}{\partial r}\right\},\quad 0\leqslant r<r_0,\quad 0<t<+\infty, \qquad (1)$$

$$u\big|_{t=0}=f(r),\quad 0\leqslant r\leqslant r_0, \qquad (2)$$

$$\left[\frac{\partial u}{\partial r}+hu\right]_{r=r_0}=0,\quad 0<t<+\infty \qquad (3)$$

es:

$$u(r,\ t)=\sum_{n=1}^{+\infty}A_n e^{-\frac{\mu_n^2a^2t}{r_0^2}t}\,J_0\left(\frac{\mu_n r}{r_0}\right), \qquad (4)$$

donde

$$A_n=\frac{2\mu_n^2}{r_0^2\,[\mu_n^2+h^2r_0^2]\cdot J_0^2(\mu_n)}\int_0^{r_0} rf(r)\,J_0\left(\frac{\mu_n r}{r_0}\right)dr, \qquad (5)$$

μ_n son las raíces positivas de la ecuación

$$\mu J_0'(\mu)+hr_0J_0(\mu)=0. \qquad (6)$$

En las condiciones del régimen regular

$$u(r,\ t)\approx\frac{2\mu_1^2\int_0^{r_0} rf(r)\,J_0\left(\frac{\mu_n r}{r_0}\right)dr}{r_0^2\,[\mu_1^2+h^2r_0^2]\,J_0^2(\mu_1)}\,J_0\left(\frac{\mu_1 r}{r_0}\right)e^{-\frac{\mu_1^2a^2}{r_0^2}t}.$$

31. La solución del problema de contorno

$$\frac{\partial u}{\partial t}=a^2\left\{\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\,\frac{\partial u}{\partial r}\right\},\quad 0\leqslant r<r_0,\quad 0<t<+\infty, \qquad (1)$$

$$\frac{\partial u}{\partial r}=h\,[U_1-u]\quad \text{para}\quad r=r_0,\ 0<t<+\infty, \qquad (2)$$

$$u(r,\ 0)=U_0,\quad 0\leqslant r<r_0 \qquad (3)$$

es

$$u(r,\ t)=U_1+2\,(U_1-U_0)\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{J_1(\mu_n)\,e^{-\frac{a^2\mu_n^2}{r_0^2}t}}{\mu_n\,[J_0^2(\mu_n)+J_1^2(\mu_n)]}\,J_0\left(\frac{\mu_n r}{r_0}\right), \qquad (4)$$

donde μ_n son las raíces positivas de la ecuación

$$\mu J_0'(\mu)+hr_0J_0(\mu)=0. \tag{5}$$

Observación. En virtud de (5)

$$\frac{J_1(\mu_n)}{\mu_n\,[J_0^2(\mu_n)+J_1^2(\mu_n)]}=\frac{hr_0}{J_0(\mu_n)\,[\mu_n^2+h^2r_0^2]}.$$

De esta manera, la expresión (4) para $u(r, t)$ puede ser escrita en la forma

$$u(r, t)=U_1+2(U_1-U_0)\,hr_0\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{e^{-\frac{a^2\mu_n^2}{r_0^2}t}}{J_0(\mu_n)\,[\mu_n^2+h^2r_0^2]}J_0\left(\frac{\mu_n r}{r_0}\right). \tag{6}$$

32. $$u(r, t)=U_0+\alpha\left[t+\frac{r^2-r_0^2-2h\dfrac{r_0}{h}}{4a^2}\right]+\frac{2hr_0^3\alpha}{a^2}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{e^{-\frac{a^2\mu_n^2t}{r_0^2}}J_0\left(\dfrac{\mu_n r}{r_0}\right)}{\mu_n^2J_0(\mu_n)\,[\mu_n^2-h^2r_0^2]}, \tag{1}$$

donde μ_n tienen los mismos valores que en la respuesta al problema anterior.

33. La intensidad del campo magnético es

$$H=H_0\left\{1-2\sum_{n=1}^{+\infty}e^{-\frac{\mu_n^2a^2}{r_0^2}t}\frac{J_0\left(\dfrac{\mu_n r}{r_0}\right)}{\mu_nJ_1(\mu_n)}\right\},$$

donde μ_n son las raíces positivas de la ecuación $J_0(\mu)=0$. El flujo de la inducción magnética a través de la sección transversal del cilindro es

$$\Phi=\int_0^{2\pi}\int_0^{r_0}Br\,dr\,d\varphi=$$

$$=\mu\int_0^{2\pi}\int_0^{r_0}H_0\left\{1-2\sum_{n=1}^{+\infty}e^{-\frac{\mu_n^2a^2}{r_0^2}t}\frac{J_0\left(\dfrac{\mu_n r}{r_0}\right)}{\mu_nJ_1(\mu_n)}\right\}r\,dr\,d\varphi=$$

$$=\pi r_0^2\mu H_0\left\{1-4\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{e^{-\frac{\mu_n^2a^2}{r_0^2}t}}{\mu_n^2}\right\}.$$

Indicación. En la ecuación para el vector de la intensidad magnética *)

$$\Delta H=\frac{\varepsilon\mu}{c^2}\frac{\partial^2H}{\partial t^2}+\frac{4\pi\mu\sigma}{c^2}\frac{\partial H}{\partial t}$$

*) Véase [7], págs. 287-291.

para un medio conductor con elevada conductibilidad se puede despreciar el término $\frac{\varepsilon\mu}{c^2}\frac{\partial^2 H}{\partial t^2}$ en comparación con el término $\frac{4\pi\mu\sigma}{c^2}\frac{\partial H}{\partial t}$, lo que conduce a la ecuación

$$\frac{\partial H}{\partial t}=a^2\Delta H, \quad a^2=\frac{c^2}{4\pi\mu\sigma}.$$

Desarrollando el vector H con respecto a los vectores unitarios e_r, e_φ, e_z del sistema cilíndrico, el eje que coincide con el eje del cilindro

$$H=H_re_r+H_\varphi e_\varphi+H_ze_r.$$

Dado que el campo exterior no depende de φ y es paralelo al eje z, entonces es natural suponer que $H_r=H_\varphi=0$ y $H_z=H(r, t)$. Esta hipótesis es válida en virtud del teorema de unicidad de solución del problema de contorno. Para $H(r, t)$ obtenemos el problema de contorno

$$\frac{\partial H}{\partial t}=a^2\left\{\frac{\partial^2 H}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial H}{\partial r}\right\}, \quad 0\leqslant r<r_0, \quad 0<t<+\infty, \tag{1}$$

$$H(r, 0)=0, \quad 0<r<r_0, \tag{2}$$

$$H(r_0, t)=H_0 \quad 0<t<+\infty.$$

34. En el sistema cilíndrico de coordenadas el eje z de que coincide con el eje del cilindro

$$H=e_rH_r+e_\varphi H_\varphi+e_zH_z, \quad H_r=H_\varphi\equiv 0, \quad H_z=H(r, t),$$

$$H(r, t)=H_0\frac{\operatorname{ber}\omega' r\operatorname{bei}\omega' r_0-\operatorname{bei}\omega' r\operatorname{ber}\omega' a}{\operatorname{ber}^2\omega' r_0+\operatorname{bei}^2\omega' r_0}\times$$

$$\times\cos\omega t+H_0\frac{\operatorname{ber}\omega' r\operatorname{bei}\omega' r_0-\operatorname{bei}\omega' r\operatorname{ber}\omega' r_0}{\operatorname{ber}^2\omega' r_0+\operatorname{bei}^2\omega' r_0}\times$$

$$\times\operatorname{sen}\omega t+2H_0\sum_{n=1}^{+\infty}e^{\frac{a^2\mu_n^2 t}{r_0^2}}\frac{\mu_n^3}{\mu_n^4+\omega'^4r_0^4}\frac{J_0\left(\frac{\mu_n r}{r_0}\right)}{J_1(\mu_n)},$$

donde μ_n son las raíces positivas de la ecuación $J_0(\mu)=0$ y $\omega'=\frac{\sqrt{\omega}}{a}$.

Resolución. La solución del problema de contorno

$$\frac{\partial H}{\partial t}=a^2\left\{\frac{\partial^2 H}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial H}{\partial r}\right\}, \quad 0\leqslant r<r_0, \quad 0<t<+\infty, \tag{1}$$

$$H(r, 0)=0, \quad 0\leqslant r<r_0, \tag{2}$$

$$H(r_0, t)=H_0\cos\omega t, \quad 0<t<+\infty, \tag{3}$$

hallamos como parte real de la solución del problema de contorno

$$\frac{\partial U}{\partial t}=a^2\left\{\frac{\partial^2 U}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial U}{\partial r}\right\}, \quad 0\leqslant r<r_0, \quad 0<t<+\infty, \tag{1'}$$

$$U(r_0, 0)=0, \quad 0\leqslant r<r_0. \tag{2'}$$

$$U(r_0, t)=H_0e^{i\omega t}, \quad 0<t<+\infty. \tag{3'}$$

La solución del problema de contorno (1′), (2′), (3′) la buscamos en la forma

$$U(r,\ t) = V(r,\ t) + W(r,\ t), \tag{4}$$

donde $V(r,\ t)$ es solución particular de la ecuación (1′) que satisface la condición de frontera (3′) y es de la forma

$$V(r,\ t) = R(r)\,e^{i\omega t}, \tag{5}$$

$W(r,\ t)$ es la solución de la ecuación (1′) que satisface la condición inicial

$$W(r,\ 0) = -V(r,\ 0) = -R(r) \tag{6}$$

y la condición de frontera

$$W(r_0,\ t) = 0. \tag{7}$$

Sustituyendo (5) en (1′) y (3′), hallamos

$$V(r,\ t) = H_0 \frac{I_0(r\omega' \sqrt{i})}{I_0(r_0\omega' \sqrt{i})}\,e^{i\omega t} = H_0 \frac{\operatorname{ber}\omega' r + i \operatorname{bei}\omega' r}{\operatorname{ber}\omega' r_0 + i \operatorname{bei}\omega' r_0}\,e^{i\omega t}\ {}^{*)} \tag{8}$$

donde

$$\omega' = \frac{\sqrt{\omega}}{a},$$

$$R(r) = H_0 \frac{I_0(r\omega' \sqrt{i})}{I_0(r_0\omega' \sqrt{i})}, \tag{9}$$

$$W(r,\ t) = \sum_{n=1}^{+\infty} A_n e^{-\frac{a^2\mu_n^2}{r_0^2} t} J_0\left(\frac{\mu_n r}{r_0}\right), \tag{10}$$

$$A_n = \frac{\int\limits_0^{r_0} rR(r)\,J_0\left(\frac{\mu_n r}{r_0}\right) dr}{\frac{r_0^2}{2}\,[J_1(\mu_n)]^2} = 2H_0 \frac{\mu_n^3 \omega'^2 r_0^2 i}{(\mu_n^4 + \omega'^4 r_0^4)\,J_1(\mu_n)}. \tag{11}$$

El cálculo de la integral que está en el numerador de la igualdad (11) se realiza mediante el siguiente procedimiento general.

Sean $Z_\nu(\lambda^* x)$ y $Z_\nu(\lambda x)$ funciones cilíndricas arbitrarias de ν-ésimo orden; λ y λ^*, unos números reales o complejos. Obtenemos:

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{dZ_\nu(\lambda x)}{dx}\right] + \left(\lambda^2 x - \frac{\nu^2}{x}\right) Z_\nu(\lambda x) = 0, \tag{12}$$

$$\frac{d}{dx}\left[x\,\frac{dZ_\nu(\lambda^* x)}{dx}\right] + \left(\lambda^{*2} x - \frac{\nu^2}{x}\right) Z_\nu(\lambda^* x) = 0. \tag{13}$$

Multiplicando la primera de ellas por $Z_\nu(\lambda^* x)$ y la segunda por $Z_\nu(\lambda x)$, restando los resultados y realizando la integración, obtenemos:

$$\int xZ_\nu(\lambda^* x)\,Z_\nu(\lambda x)\,dx = \frac{x\,[\lambda Z_\nu(\lambda^* x)\,Z'_\nu(\lambda x) - \lambda^* Z_\nu(\lambda x)\,Z'_\nu(\lambda^* x)]}{\lambda^{*2} - \lambda^2}. \tag{14}$$

---

*) Recordemos que $J_0(xi\sqrt{i}) = I_0(x\sqrt{i}) = \operatorname{ber} x + i \operatorname{bei} x$; $\operatorname{ber} x = 1 - \frac{x^4}{2^2 4^2} + \frac{x^8}{2^2 4^2 6^2 8^2} - \ldots$; $\operatorname{bei} x = \frac{x^2}{2^2} - \frac{x^6}{2^2 4^2 6^2} + \frac{x^{10}}{2^2 4^2 6^2 8^2 10^2} - \ldots$

Haciendo $\lambda^* = \omega' \sqrt{i}$, $\lambda = \frac{\mu_n}{r_0}$, obtenemos:

$$\int_{r_0}^{r} r I_0(r\omega' \sqrt{i}) J_0\left(\frac{\mu_n r}{r_0}\right) dr = H_0 \frac{r_0^2 \mu_n J_1(\mu_n)}{\mu_n^2 - \omega'^2 r_0^2 i}, \tag{15}$$

de donde directamente se deduce (11).

Separando la parte real de $V(r, t)$ y de $W(r, t)$ y sumando, obtenemos la igualdad (1), dada en la respuesta.

Observación. Pasando a límite en (14) cuando $\lambda^* \to \lambda$ y utilizando la ecuación (12), no es difícil obtener una relación importante para calcular las normas de las funciones propias

$$\int x Z_\nu^2(\lambda x) dx = \frac{(\lambda x)^2 [Z_\nu'(\lambda x)]^2 + [(\lambda x)^2 - \nu^2] [Z_\nu(\lambda x)]^2}{2\lambda^2}. \tag{16}$$

35. $$u(r, t) = \frac{\pi^2}{2r_0^2} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\mu_n^2 J_0^2(\mu_n) \int_{r_1}^{r_2} r f(r) Z_0\left(\frac{\mu_n r}{r_1}\right) dr}{J_0^2(\mu_n) - J_0^2(\mu_n k)} \times$$

$$\times e^{-\frac{\mu_n^2 a^2 t}{r_1^2}} = Z_0\left(\frac{\mu_n r}{r_1}\right) - \pi \sum_{n=1}^{+\infty} \times \frac{U_2 J_0(\mu_n) - U_1 J_0(\mu_n k)}{J_0^2(\mu_n) - J_0^2(\mu_n k)} J_0(\mu_n) Z_0\left(\frac{\mu_n r}{r_1}\right) \times$$

$$\times e^{-\frac{\mu_n^2 a^2 t}{r_1^2}} + \left[U_1 \ln \frac{r_2}{r} + U_2 \ln \frac{r}{r_1}\right] \ln k,$$

donde $k = \frac{r_2}{r_1}$; μ_n son las raíces positivas de la ecuación

$$J_0(\mu) N_0(\mu k) - J_0(\mu k) N_0(\mu) = 0,$$

y

$$Z_0\left(\frac{\mu_n r}{r_1}\right) = N_0(\mu_n k) J_0\left(\frac{\mu_n r}{r_1}\right) - J_0(\mu_n k) N_0\left(\frac{\mu_n r}{r_1}\right).$$

Para $U_1 = U_2 = U^* = \text{const}$, $f(r) = U_0 = \text{const}$

$$u(r, t) = U^* + \pi (U_0 - U^*) \sum_{n=1}^{+\infty} \times \frac{J_0(\mu_n) Z_0\left(\frac{\mu_n r}{r}\right)}{J_0(\mu_n) + J_0(\mu_n k)} e^{-\frac{\mu_n^2 a^2 t}{r_0^2}}.$$

Indicación. Para calcular la norma de las funciones propias

$$Z_1(\lambda_k r) = J_1(\lambda_k r_1) N_1(\lambda_k r) - N_1(\lambda_k r_1) J_1(\lambda_k r)$$

se debe utilizar la igualdad (16) de la observación a la solución del problema 34 y la expresión para el wronskiano de las funciones cilíndricas $J_\nu(z)$, $N_\nu(z)$

$$\begin{vmatrix} J_\nu(z) & N_\nu(z) \\ J_\nu'(z) & N_\nu'(z) \end{vmatrix} = \frac{2}{\pi z}.$$

36. La solución del problema de contorno

$$\frac{\partial u}{\partial t}=a^2\left\{\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r}\right\},\quad r_1<r<r_2,\quad 0<t<+\infty, \tag{1}$$

$$u(r_1,\ t)=0,\quad u_r(r_2,\ t)=\frac{q_0}{\lambda},\quad 0<t<+\infty, \tag{2}$$

$$u(r,\ 0)=0,\quad r_1<r<r_2, \tag{3}$$

$$u(r,\ t)=U(r)+\sum_{k=1}^{+\infty}A_k e^{-a^2\lambda_k^2 t}\,[J_0(\lambda_k r_1)N_0(\lambda_k r)-N_0(\lambda_k r_1)J_0(\lambda_k r)], \tag{4}$$

donde $U(r)=\frac{q_0 r_2}{\lambda}\ln\frac{r}{r_1}$ es la solución estacionaria de la ecuación (1) que satisface las condiciones de frontera (2) (el límite a que tiende la temperatura cuando $t\to-\infty$), y los coeficientes A_k se hallan por las fórmulas

$$A_k=\frac{\pi^2\lambda_k^2}{2}\cdot\frac{J_1^2(\lambda_k r_2)}{J_0^2(\lambda_k r_1)+J_1^2(\lambda_k r_2)}\times\int_{r_1}^{r_2} rU(r)\,[J_0(\lambda_k r_1)N_0(\lambda_k r)-$$
$$-N_0(\lambda_k r_1)J_0(\lambda_k r)]\,dr, \tag{5}$$

λ_k son las raíces positivas de la ecuación

$$J_0(\lambda r_1)N_0'(\lambda r_2)-N_0(\lambda r_1)J_0'(\lambda r_2)=0. \tag{6}$$

37. La solución del problema de contorno

$$\frac{\partial u}{\partial t}=a^2\left\{\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r}\right\},\quad r_1<r<r_2,\quad 0<t<+\infty, \tag{1}$$

$$u_r(r_1,\ t)-h_1u(r_1,\ t)=0,\quad u_r(r_2,\ t)+h_2u(r_2,\ t)=0,\quad 0<t<+\infty, \tag{2}$$

$$u(r,\ 0)=U_0,\quad r_1<r<r_2 \tag{3}$$

es:

$$u(r,\ t)=\sum_{k=1}^{+\infty}A_k e^{-a^2\lambda_k^2 t}\,\{[\lambda_k J_0'(\lambda_k r_1)-h_1J_0(\lambda_k r_1)]\,N_0(\lambda_k r)-[\lambda_k N_0'(\lambda_k r_1)-$$
$$-h_1N_0(\lambda_k r_1)]\,J_0(\lambda_k r)\}, \tag{4}$$

donde

$$A_k=\frac{\pi^2\lambda_k^2}{2}\times$$
$$\times\frac{[\lambda_k J_0'(\lambda_k r_2)+h_2J_0(\lambda_k r_2)]^2}{(h_2^2+\lambda_k^2)\,[\lambda_k J_0'(\lambda_k r_1)-h_1J_0(\lambda_k r_1)]^2-(h_1^2+\lambda_k^2)\,[\lambda_k J_0'(\lambda_k r_2)+h_2J_0(\lambda_k r_2)]^2}\times$$
$$\times U_0\frac{1}{\lambda_k}\{[\lambda_k J_0'(\lambda_k r_1)-h_1J_0(\lambda_k r_1)]\times[r_2N_1(\lambda_k r_2)-r_1N_1(\lambda_k r_1)]-$$
$$-[\lambda_k N_0'(\lambda_k r_1)-h_1N_0(\lambda_k r_1)]\cdot[r_2J_1(\lambda_k r_2)-r_1J_1(\lambda_k r_1)]\}$$

λ_k son las raíces positivas de la ecuación

$$\begin{vmatrix}\lambda J_0'(\lambda r_1)-h_1J_0(\lambda r_1) & \lambda N_0'(\lambda r_1)-h_1N_0\times(\lambda r_1)\\ J_0'(\lambda r_2)+h_2J_0(\lambda r_2) & \lambda N_0'(\lambda r_2)+h_2N_0(\lambda r_2)\end{vmatrix}=0.$$

38. La solución del problema de contorno

$$\frac{\partial v}{\partial t}=\nu\left\{\frac{\partial^2 v}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial r}-\frac{v}{r^2}\right\},\quad r_1<r<r_2,\quad 0<t<+\infty, \tag{1}$$

$$v(r_1, t)=0,\quad v(r_2, t)=\omega r_2,\quad 0<t<+\infty, \tag{2}$$

$$v(r, 0)=0,\quad r_1<r<r_2; \tag{3}$$

además, $v(r, t)=v_\varphi(r, t)$*), es

$$v(r, t)=\frac{\omega r_2^2}{r}\frac{r^2-r_1^2}{r_2^2-r_1^2}-\pi\omega r_2\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{J_1(\lambda_k r_1)J_1(\lambda_k r_2)e^{-\nu\lambda_k^2 t}}{J_1^2(\lambda_k r_2)-J_1^2(\lambda_k r_1)}v_k(r), \tag{4}$$

$$v_k(r)=J_1(\lambda_k r_1)N_1(\lambda_k r)-N_1(\lambda_k r_1)J_1(\lambda_k r), \tag{5}$$

donde λ_k son las raíces positivas de la ecuación

$$J_1(\lambda_k r_1)N_1(\lambda_k r_2)-N_1(\lambda_k r_1)J_1(\lambda_k r_2)=0. \tag{6}$$

39. $$u(r, \varphi, t)=\sum_{n, k=0}^{+\infty}J_n\left(\frac{\mu_k^{(n)}r}{r_0}\right)[A_{n, k}\cos n\varphi+$$

$$+B_{n, k}\operatorname{sen} n\varphi]\,e^{-\frac{a^2\mu_k^{(n)2}}{r_0^2}t}, \tag{1}$$

donde

$$A_{n, k}=\frac{\varepsilon_n}{\pi r_0^2[J_n'(\mu_k^{(n)})]^2}\int_0^{r_0}\int_0^{2\pi}f(r, \varphi)J_n\left(\frac{\mu_k^{(n)}}{r_0}\right)\times\cos n\varphi\, r\,dr\,d\varphi, \tag{2}$$

$$\varepsilon_n=\left\{\begin{matrix}1 & \text{para} & n=0,\\ 2 & \text{para} & n\neq 0,\end{matrix}\right\} \tag{3}$$

$$B_{n, k}=\frac{2}{\pi r_0^2[J_n'(\mu_k^{(n)})]^2}\times\int_0^{r_0}\int_0^{2\pi}f(r, \varphi)J_n\left(\frac{\mu_k^{(n)}r}{r_0}\right)\operatorname{sen} n\varphi\, r\,dr\,d\varphi, \tag{4}$$

$\mu_k^{(n)}$ son las raíces positivas de la ecuación $J_n(\mu)=0$. (5)

40. $$u(r, \varphi, t)=\sum_{n, k=0}^{+\infty}J_n\left(\frac{\mu_k^{(n)}}{r_0}\right)[A_{n, k}\cos n\varphi+B_{n, k}\operatorname{sen} n\varphi]\times$$

$$\times e^{\frac{-a^2\mu_k^{(n)2}}{r_0^2}t}, \tag{1}$$

$$A_{n, k}=\frac{\varepsilon_n}{\pi r_0^2 J_n^2(\mu_k^{(n)})\left[1+\frac{r_0^2h^2-n^2}{\mu_k^{(n)2}}\right]}\int_0^{r_0}\int_0^{2\pi}\times$$

*) Véase la indicación a la respuesta al problema 7.

$$\times f(r, \varphi) J_n\left(\frac{\mu_k^{(n)} r}{r_0}\right) \cos n\varphi\, r\, dr\, d\varphi, \tag{2}$$

$$\varepsilon_n = \begin{cases} 1 & \text{para} \quad n=0, \\ 2 & \text{para} \quad n \neq 0, \end{cases} \tag{3}$$

$$B_{n,k} = \frac{2}{\pi r_0^2 J_n^2(\mu_k^{(n)})\left[1+\frac{r_0^2 h^2 - n^2}{\mu_k^{(n)2}}\right]} \int_0^{r_0} \int_0^{2\pi} \times$$

$$\times f(r, \varphi) J_n\left(\frac{\mu_k^{(n)} r}{r_0}\right) \operatorname{sen} n\varphi\, r\, dr\, d\varphi, \tag{4}$$

$\mu_k^{(n)}$ son las raíces positivas de la ecuación

$$\mu J_n'(\mu) + r_0 h J_n(\mu) = 0; \tag{5}$$

h, el coeficiente del intercambio de calor que entra en la ecuación de frontera

$$\left[\frac{\partial u}{\partial r} + hu\right]_{r=r_0} = 0, \quad 0 < t < +\infty. \tag{6}$$

41. $u(r, \varphi, t) =$

$$= \sum_{n, k=0}^{+\infty} e^{-a^2 \lambda_k^{(n)2} t} Z_n(\lambda_k^{(n)} r) \{A_{n,k} \cos n\psi + B_{n,k} \operatorname{sen} n\varphi\}, \tag{1}$$

$$Z_n(\lambda_k^{(n)} r) - J_n(\lambda_k^{(n)} r_1) N_n(\lambda_k^{(n)} r) - N_n(\lambda_k^{(n)} r_1) J_n(\lambda_k^{(n)} r), \tag{2}$$

donde $\lambda_k^{(n)}$ son las raíces positivas de la ecuación

$$J_n(\lambda_k^{(n)} r_1) N_n(\lambda_k^{(n)} r_2) - N_n(\lambda_k^{(n)} r_1) J_n(\lambda_k^{(n)} r_2) = 0, \tag{3}$$

$$A_{n,k} = \frac{\pi \lambda_k^{(n)2}}{2\varepsilon_n} \frac{J_n^2(\lambda_k^{(n)} r_2)}{J_n^2(\lambda_k^{(n)} r_1) - J_n^2(\lambda_k^{(n)} r_2)} \times$$

$$\times \int_0^{r_0} \int_0^{2\pi} f(r, \varphi) Z_n(\lambda_k^{(n)} r) \cos n\varphi\, r\, dr\, d\varphi, \tag{4}$$

$$\varepsilon_n = \begin{cases} 2 & \text{para} \quad n=0, \\ 1 & \text{para} \quad n \neq 0, \end{cases} \tag{5}$$

$$B_{n,k} = \frac{\pi \lambda_k^{(n)2}}{2} \frac{J_n^2(\lambda_k^{(n)} r_2)}{J_n^2(\lambda_k^{(n)} r_1) - J_n^2(\lambda_k^{(n)} r_2)} \times$$

$$\times \int_0^{r_0} \int_0^{2\pi} f(r, \varphi) Z_n(\lambda_k^{(n)} r) \operatorname{sen} n\varphi\, r\, dr\, d\varphi. \tag{6}$$

Observación. Si se representa la solución mediante las funciones propias

$$\widetilde{Z}_n(\lambda_k^{(n)}r) = J_n(\lambda_k^{(n)}r_2)\,N_n(\lambda_k^{(n)}r) - N_n(\lambda_k^{(n)}r_2)\,J_n(\lambda_k^{(n)}r) = \frac{J_n(\lambda_k^{(n)}r_2)}{J_n(\lambda_k^{(n)}r_1)}\,Z_n(\lambda_k^{(n)}r), \qquad (7)$$

(esta relación entre $\widetilde{Z}_n$ y Z_n se establece mediante (3)), entonces

$$u(r,\ \varphi,\ t) = \sum_{n,\ k=0}^{+\infty} e^{-a^2\lambda_k^{(n)2}t} \times \widetilde{Z}_n(\lambda_k^{(n)}r)\,\{\widetilde{A}_{n,\,k}\cos n\varphi + \widetilde{B}_{n,\,k}\,\mathrm{sen}\,n\varphi\}. \qquad (8)$$

Las fórmulas para $\widetilde{A}_{n,\,k}$ y $\widetilde{B}_{n,\,k}$ se obtienen de las fórmulas (4) y (6) si la fracción

$$\frac{J_n^2(\lambda_k^{(n)}r_2)}{J^2(\lambda_k^{(n)}r_1) - J_n^2(\lambda_k^{(n)}r_2)}$$

es sustituida por la fracción

$$\frac{J_n^2(\lambda_k^{(n)}r_1)}{J^2(\lambda_k^{(n)}r_1) - J_n^2(\lambda_k^{(n)}r_2)}.$$

42. La solución del problema de contorno

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2\left\{\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2}\right\},$$

$$r_1 < r < r_2, \quad 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi, \quad 0 < t < +\infty, \qquad (1)$$

$$\left[\frac{\partial u}{\partial r} - h_1 u\right]_{r=r_1} = 0, \left[\frac{\partial u}{\partial r} + h_2 u\right]_{r=r_2} = 0, \quad 0 < t < +\infty, \qquad (2)$$

$$u|_{t=0} = f(r,\ \varphi), \quad r_1 < r < r_2, \quad 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi, \qquad (3)$$

es

$$u(r,\ \varphi,\ t) = \sum_{n,\ k=0}^{+\infty} e^{-a^2\lambda_k^{(n)2}t} \times Z_n(\lambda_k^{(n)}r)\,\{A_{n,\,k}\cos n\varphi + B_{n,\,k}\,\mathrm{sen}\,n\varphi\}, \qquad (4)$$

donde

$$Z_n(\lambda_k^{(n)}r) = [\lambda_k^{(n)}J_n'(\lambda_k^{(n)}r_1) - h_1 J_n(\lambda_k^{(n)}r_1)]\,N_n(\lambda_k^{(n)}r) - [\lambda_k^{(n)}N_n'(\lambda_k^{(n)}r_1) - h_1 N_n(\lambda_k^{(n)}r_1)]\,J_n(\lambda_k^{(n)}r), \qquad (5)$$

donde $\lambda_k^{(n)}$ son las raíces positivas de la ecuación

$$\begin{vmatrix} \lambda_k^{(n)}J_n'(\lambda_k^{(n)}r_1) - h_1 J_n(\lambda_k^{(n)}r_1) & \lambda_k^{(n)}N_n'(\lambda_k^{(n)}r_1) - h_1 N_n(\lambda_k^{(n)}r_1) \\ \lambda_k^{(n)}J_n'(\lambda_k^{(n)}r_2) + h_2 J_n(\lambda_k^{(n)}r_2) & \lambda_k^{(n)}N_n'(\lambda_k^{(n)}r_2) + h_2 N_n(\lambda_k^{(n)}r_2) \end{vmatrix} = 0, \qquad (6)$$

$$A_{n,\,k}=$$

$$=\frac{2\lambda_k^{(n)2}\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_{r_1}^{r_2} f(r,\ \varphi)\,Z_n(\lambda_k^{(n)}r)\cos n\varphi r\,dr\,d\varphi}{\pi\varepsilon_n\,[h_2^2r_2^2+\lambda_k^{(n)2}r_2^2-n^2]\,Z_n^2(\lambda_k^{(n)}r_2)-[h_1^2r_1^2+\lambda_k^{(n)2}r_1^2-n^2]\,Z_n^2(\lambda_k^{(n)}r_1)}, \tag{7}$$

$$\varepsilon_n=\begin{Bmatrix}2 & \text{para} & n=0,\\ 1 & \text{para} & n\neq 0,\end{Bmatrix} \tag{8}$$

$$B_{n,\,k}=$$

$$=\frac{2\lambda_k^{(n)2}\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_{r_1}^{r_2} f(r,\ \varphi)\,Z_n(\lambda_k^{(n)}r)\,\text{sen}\,n\varphi r\,dr\,d\varphi}{\pi\,[h_2^2r_2^2+\lambda_k^{(n)2}r_2^2-n^2]\,Z_n^2(\lambda_k^{(n)}r_2)-[h_1^2r_1^2+\lambda_k^{(n)2}r_1^2-n^2]\,Z_n^2(\lambda_k^{(n)}r_1)}. \tag{9}$$

Observación. Se puede representar la solución mediante las funciones propias

$$\widetilde{Z}_n(\lambda_k^{(n)}r)=[\lambda_k^{(n)}J_n'(\lambda_k^{(n)}r_2)+h_2J_n(\lambda_k^{(n)}r_2)]\,N_n(\lambda_k^{(n)}r)-$$
$$-[\lambda_k^{(n)}N_n'(\lambda_k^{(n)}r_2)+h_2N_n(\lambda_k^{(n)}r_2)]\,J_n(\lambda_k^{(n)}r), \tag{10}$$

relacionadas con las funciones $Z_n(\lambda_k^{(n)}r)$ por las relaciones

$$\widetilde{Z}_n(\lambda_k^{(n)}r)=$$
$$=\frac{\lambda_k^{(n)}J_n'(\lambda_k^{(n)}r_2)+h_2J_n(\lambda_k^{(n)}r_2)}{\lambda_k^{(n)}J_n'(\lambda_k^{(n)}r_1)-h_1J_n(\lambda_k^{(n)}r_1)}\cdot Z_n(\lambda_k^{(n)}r), \tag{11}$$

$$u(r,\ \varphi,\ t)=\sum_{n=k}^{+\infty}e^{-a^2\lambda_k^{(n)2}t}\,\widetilde{Z}_n(\lambda_k^{n}r)\,\{\widetilde{A}_{n,\,k}\cos n\varphi+\widetilde{B}_{n,\,k}\,\text{sen}\,n\varphi\}. \tag{12}$$

Las fórmulas para $\widetilde{A}_{n,\,k}$ y $\widetilde{B}_{n,\,k}$ se obtienen de las fórmulas (7) y (9) mediante la sustitución de Z_n por $\widetilde{Z}_n$.

43. $$u(r,\ \varphi,\ t)=\sum_{n,\,k=1}^{+\infty}A_{n,\,k}e^{-a^2\lambda_k^{(n)2}t}\times J_{\frac{n\pi}{\varphi_0}}(\lambda_k^{(n)}r)\ \text{sen}\,\frac{n\pi\varphi}{\varphi_0} \tag{1}$$

donde $\lambda_k^{(n)}$ son las raíces positivas de la ecuación

$$J_{\frac{n\pi}{\varphi_0}}(\lambda_k^{(n)}r_0)=0, \tag{2}$$

$$A_{n,\,k}=\frac{4}{r_0^2\varphi_0\,[J'_{\frac{n\pi}{\varphi_0}}(\lambda_k^{(n)}r_0)]^2}\int\limits_0^{r_0}\int\limits_0^{\varphi_0}\times f(r,\ \varphi)\,J_{\frac{n\pi}{\varphi_0}}(\lambda_k^{(n)}r)\,\text{sen}\,\frac{\pi n\varphi}{\varphi_0}\,r\,dr\,d\varphi. \tag{3}$$

44. $$u(r,\ \varphi,\ t)=\sum_{n,\,k=0}^{+\infty}A_{n,\,k}e^{-a^2\lambda_k^{(n)2}t}\times J_{\frac{n\pi}{\varphi_0}}(\lambda_k^{(n)}r)\cos\frac{n\pi\varphi}{\varphi_0}, \tag{1}$$

donde $\lambda_k^{(n)}$ son las raíces positivas de la ecuación

$$\lambda_k^{(n)} J'_{\frac{n\pi}{\varphi_0}}(\lambda_k^{(n)} r_0) + r_0 h J_{\frac{n\pi}{\varphi_0}}(\lambda_k^{(n)} r_0) = 0, \qquad (2)$$

$$A_{n,\,k} = \frac{4\lambda_k^{(n)2}}{\varphi_0 r_0^2 \left(\lambda_k^{(n)2} + h^2 - \frac{n^2\pi^2}{\varphi_0^2 r_0^2}\right) J^2_{\frac{n\pi}{\varphi_0}}(\lambda_k^{(n)} r_0)} \times$$

$$\times \int_0^{r_0}\int_0^{\varphi_0} f(r,\ \varphi)\, J_{\frac{n\pi}{\varphi_0}}(\lambda_k^{(n)} r) \cos\frac{n\pi\varphi}{\varphi_0}\, r\, dr\, d\varphi. \qquad (3)$$

45. $$u(r,\ \varphi,\ t) = \sum_{n,\ k=1}^{+\infty} A_{n,\,k} e^{-a^2\lambda_k^{(n)2} t} \times Z_{\frac{n\pi}{\varphi_0}}(\lambda_k^{(n)} r) \operatorname{sen}\frac{n\pi\varphi}{\varphi_0}, \qquad (1)$$

$$Z_{\frac{n\pi}{\varphi_0}}(\lambda_k^{(n)} r) = J_{\frac{n\pi}{\varphi_0}}(\lambda_k^{(n)} r_1)\, N_{\frac{n\pi}{\varphi_0}}(\lambda_k^{(n)} r) - N_{\frac{n\pi}{\varphi_0}}(\lambda_k^{(n)} r_1)\, J_{\frac{n\pi}{\varphi_0}}(\lambda_k^{(n)} r), \qquad (2)$$

$\lambda_k^{(n)}$ son las raíces positivas de la ecuación

$$J_{\frac{n\pi}{\varphi_0}}(\lambda_k^{(n)} r_1)\, N_{\frac{n\pi}{\varphi_0}}(\lambda_k^{(n)} r_2) -$$

$$- N_{\frac{n\pi}{\varphi_0}}(\lambda_k^{(n)} r_1)\, J_{\frac{n\pi}{\varphi_0}}(\lambda_k^{(n)} r_2) = 0, \qquad (3)$$

$$A_{n,\,k} = \frac{\pi^2\lambda_k^{(n)2}}{\varphi_0} \frac{J^2_{\frac{n\pi}{\varphi_0}}(\lambda_k^{(n)} r_2)}{J^2_{\frac{n\pi}{\varphi_0}}(\lambda_k^{(n)} r_1) - J^2_{\frac{n\pi}{\varphi_0}}(\lambda_k^{(n)} r_2)} \times$$

$$\times \int_{r_1}^{r_2}\int_0^{\varphi_0} f(r,\ \varphi)\, Z_{\frac{n\pi}{\varphi_0}}(\lambda_k^{(n)} r) \operatorname{sen}\frac{n\pi\varphi}{\varphi_0}\, r\, dr\, d\varphi. \qquad (4)$$

46. La solución del problema de contorno

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \left\{\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2}\right\}, \quad r_1 < r < r_2, \quad 0 < \varphi < \varphi_0 \qquad (1)$$

$$\left[\frac{\partial u}{\partial r} - h_1 u\right]_{r=r_1} = 0, \quad \left[\frac{\partial u}{\partial r} + h_2 u\right]_{r=r_2} = 0,$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial \varphi}\right|_{\varphi=0} = 0, \quad \left.\frac{\partial u}{\partial \varphi}\right|_{\varphi=\varphi_0} = 0,$$

$$0 < t < +\infty, \qquad (2)$$

$$u|_{t=0} = f(r,\ \varphi), \quad r_1 < r < r_2, \quad 0 < \varphi < \varphi_0, \qquad (3)$$

es

$$u(r,\ \varphi,\ t) = \sum_{n,\ k=0}^{+\infty} A_{n,\,k} e^{-a^2\lambda_k^{(n)2} t} Z_n(\lambda_k^{(n)} r) \times \cos\frac{n\pi\varphi}{\varphi_0}, \qquad (1')$$

donde

$$Z_n(\lambda_k^{(n)}r)=[\lambda_k^{(n)}J'_{\frac{n\pi}{\varphi_0}}(\lambda_k^{(n)}r_1)-h_1J_{\frac{n\pi}{\varphi_0}}(\lambda_k^{(n)}r_1)]\,N_{\frac{n\pi}{\varphi_0}}(\lambda_k^{(n)}r)-$$
$$-[\lambda_k^{(n)}N'_{\frac{n\pi}{\varphi_0}}(\lambda_k^{(n)}r_1)-h_1N_{\frac{n\pi}{\varphi_0}}(\lambda_k^{(n)}r_1)]\times J_{\frac{n\pi}{\varphi_0}}(\lambda_k^{(n)}r), \qquad (2')$$

$\lambda_k^{(n)}$ son las raíces positivas de la ecuación

$$\begin{vmatrix} \lambda_k^{(n)}J'_{\frac{n\pi}{\varphi_0}}(\lambda_k^{(n)}r_1)-h_1J_{\frac{n\pi}{\varphi_0}}(\lambda_k^{(n)}r_1)\,\lambda_k^{(n)}; & N'_{\frac{n\pi}{\varphi_0}}\times(\lambda_k^{(n)}r_1)-h_1N_{\frac{n\pi}{\varphi_0}}(\lambda_k^{(n)}r_1) \\ \lambda_k^{(n)}J'_{\frac{n\pi}{\varphi_0}}(\lambda_k^{(n)}r_2)+h_2J_{\frac{n\pi}{\varphi_0}}(\lambda_k^{(n)}r_2)\,\lambda_k^{(n)}; & N'_{\frac{n\pi}{\varphi_0}}(\lambda_k^{(n)}r_2)+h_2N_{\frac{n\pi}{\varphi_0}}(\lambda_k^{(n)}r_2) \end{vmatrix}=0, \quad (3')$$

$$A_{n,\,k}=\frac{4\lambda_k^{(n)2}}{\varphi_0}\times$$
$$\times\frac{\int\limits_0^{\varphi_0}\int\limits_0^{r_0} f(r,\varphi)\,Z_n(\lambda_k^{(n)}r)\cos\frac{n\pi\varphi}{\varphi_0}\,r\,dr\,d\varphi}{\left[h_2^2r_2^2+\lambda_k^{(n)^2}r_2^2-\frac{n^2\pi^2}{\varphi_0^2}\right]Z_n^2(\lambda_k^{(n)}r^2)-\left[h_1^2r_1^2+\lambda_k^{(n)2}r_1^2-\frac{n^2\pi^2}{\varphi_0^2}\right]Z_n^2(\lambda_k^{(n)}r_1)}. \qquad (4)$$

47. $$u(r,\varphi,z,t)=\sum_{m=1}^{+\infty}\sum_{n,\,l=0}^{+\infty}e^{-a^2\left(\frac{\mu_k^{(n)2}}{r_0^2}+\frac{m^2\pi^2}{l^2}\right)t}\times J_n\left(\frac{\mu_k^{(n)}r}{r_0}\right)\times$$
$$\times[A_{k,\,m,\,n}\cos n\varphi+B_{k,\,m,\,n}\operatorname{sen} n\varphi]\operatorname{sen}\frac{m\pi z}{l}, \qquad (1)$$

$$A_{k,\,m,\,n}=\frac{4\int\limits_0^{r_0}\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{l} rf(r,\varphi,z)\,J_n\left(\frac{\mu_k^{(n)}r}{r_0}\right)\cos n\varphi\operatorname{sen}\frac{m\pi z}{l}\,dr\,d\varphi\,dz}{\varepsilon_n\pi r_0^2 l\,[J'_n(\mu_k^{(n)})]^2}, \qquad (2)$$

donde $\mu_k^{(n)}$ son las raíces positivas de la ecuación

$$J_n(\mu_k^{(n)})=0; \qquad (3)$$

$$\varepsilon_n=\begin{cases}2 & \text{para} \quad n=0,\\ 1 & \text{para} \quad n\neq 0,\end{cases}$$

$$B_{k,\,m,\,n}=\frac{4\int\limits_0^{r_0}\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{l} rf(r,\varphi,z)\,J_n\left(\frac{\mu_k^{(n)}r}{r_0}\right)\operatorname{sen} n\varphi\operatorname{sen}\frac{m\pi z}{l}\,dr\,d\varphi\,dz}{\pi r_0^2 l\,[J'_n(\mu_k^{(n)})]^2}. \qquad (4)$$

48. La solución del problema de contorno

$$\frac{\partial u}{\partial t}=a^2\left\{\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right\},$$
$$0\leqslant r<r_0,\quad 0\leqslant\varphi\leqslant 2\pi,\quad 0<z<l,\quad 0<t<+\infty, \tag{1}$$

$$\left[\frac{\partial u}{\partial z}-h_1 u\right]_{z=0}=0,\quad \left[\frac{\partial u}{\partial z}+h_2 u\right]_{z=l}=0,\quad \left[\frac{\partial u}{\partial r}+h_3 u\right]_{r=r_0}=0,$$
$$0<t<+\infty, \tag{2}$$

$$u_{t=0}=f(r,\ \varphi,\ z),\quad 0\leqslant r<r_0,\quad 0\leqslant\varphi\leqslant 2\pi,\quad 0<z<l, \tag{3}$$

es:

$$u(r,\ \varphi,\ z,\ t)=\sum_{k,\ m,\ n=0}^{+\infty} e^{-a^2\left(\frac{\mu_k^{(n)2}}{r_0^2}+\nu_m^2\right)t} J_n\left(\frac{\mu_k^{(n)}r}{r_0}\right)\times$$
$$\times\{A_{k,\ m,\ n}\cos n\varphi+B_{k,\ m,\ n}\operatorname{sen} n\varphi\}\operatorname{sen}(\nu_m z+z_m), \tag{4}$$

donde $\mu_k^{(n)}$ son las raíces positivas de la ecuación

$$\mu_k^{(n)}J_n'(\mu_k^{(n)})+r_0h_3J_n(\mu_k^{(n)})=0, \tag{5}$$

ν_m son las raíces positivas de la ecuación

$$\operatorname{ctg}\nu_m l=\frac{\nu_m^2-h_1h_2}{\nu_m(h_1+h_2)}, \tag{6}$$

$$z_m=\operatorname{arctg}\frac{\nu_m}{h_3}, \tag{7}$$

$$A_{k,\ m,\ n}=$$
$$=\frac{4\int\limits_0^{r_0}\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{l} rf(r,\varphi,z)\,J_n\left(\frac{\mu_k^{(n)}r}{r_0}\right)\cos n\varphi\operatorname{sen}(\nu_m z+z_m)\,dr\,d\varphi\,dz}{\pi r_0^2\varepsilon_n\left[l+\frac{(h_1h_2+\nu_m^2)(h_1+h_2)}{(h_1^2+\nu_m^2)(h_2^2+\nu_m^2)}\right]J_n^2(\mu_k^{(n)})\left[1+\frac{r_0^2h^2-n^2}{\mu_k^{(n)2}}\right]}, \tag{8}$$

$$\varepsilon_n=\begin{cases}2 & \text{para}\quad n=0,\\ 1 & \text{para}\quad n\neq 0,\end{cases}$$

$$B_{k,m,n}=\frac{4\int\limits_0^{r_0}\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{l} rf(r,\ \varphi,\ z)\,J_n\left(\frac{\mu_k^{(n)}r}{r_0}\right)\operatorname{sen} n\varphi\operatorname{sen}(\nu_m z+z_m)\,dr\,d\varphi\,dz}{\pi r_0^2\left[l+\frac{(h_1h_2+\nu_m^2)(h_1+h_2)}{(h_1^2+\nu_m^2)(h_2^2+\nu_m^2)}\right]J_n^2(\mu_k^{(n)})\left[1+\frac{r_0^2h^2-n^2}{\mu_k^{(n)2}}\right]}. \tag{9}$$

49. La solución del problema de contorno

$$\frac{\partial u}{\partial t}=a^2\left\{\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+\frac{2}{r}\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{1}{r^2\operatorname{sen}\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\operatorname{sen}\theta\frac{\partial u}{\partial\theta}\right)+\right.$$
$$\left.+\frac{1}{r^2\operatorname{sen}^2\theta}\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2}\right\},\qquad(1)$$

$$u|_{r=r_0}=0,\qquad(2)$$

$$u|_{t=0}=f(r,\ \theta,\ \varphi)\qquad(3)$$

es

$$u(r,\ \theta,\ \varphi,\ t)=\sum_{m,\ n=0}^{+\infty}\sum_{k=0}^{n}e^{-\left(\frac{a\mu_m^{(n)}}{r_0}\right)^2 t}\times$$
$$\times\frac{J_{n+\frac{1}{2}}\left(\frac{\mu_m^{(n)}r}{r_0}\right)}{\sqrt{r}}P_{n,\ k}(\cos\theta)\{A_{m,\ n,\ k}\cos k\varphi+B_{m,\ n,\ k}\operatorname{sen}k\varphi\},\qquad(4)$$

donde $\mu_m^{(n)}$ son las raíces positivas de la ecuación

$$J_{n+\frac{1}{2}}(\mu_m^{(n)})=0,\qquad(5)$$

$A_{m,\ n,\ k}=$

$$=\frac{\int_0^{r_0}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}f(r,\ \theta,\ \varphi)\,r^{\frac{3}{2}}J_{n+\frac{1}{2}}\left(\frac{\mu_m^{(n)}r}{r_0}\right)\operatorname{sen}\theta P_{n,\ k}(\cos\theta)\cos k\varphi\,dr\,d\theta\,d\varphi}{\varepsilon_k\frac{\pi r_0^2(n-k)!}{(2n+1)(n-k)!}\left[J'_{n+\frac{1}{2}}(\mu_m^{(n)})\right]^2},\qquad(6)$$

$$\varepsilon_k=\begin{cases}2 & \text{para}\quad k=0,\\ 1 & \text{para}\quad k\neq 0,\end{cases}$$

$B_{m,\ n,\ k}=$

$$=\frac{\int_0^{r_0}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}f(r,\ \theta,\ \varphi)\,r^{\frac{3}{2}}J_{n+\frac{1}{2}}\left(\frac{\mu_m^{(n)}r}{r_0}\right)\operatorname{sen}\theta P_{n,\ k}(\cos\theta)\operatorname{sen}k\varphi\,dr\,d\theta\,d\varphi}{\frac{\pi r_0^2(n+k)!}{(2n+1)(n-k)!}\left[J'_{n+\frac{1}{2}}(\mu_m^{(n)})\right]^2},\qquad(7)$$

50. La solución del problema de contorno

$$\frac{\partial u}{\partial t}=a^2\left\{\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+\frac{2}{r}\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{1}{r^2\operatorname{sen}\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\operatorname{sen}\theta\frac{\partial u}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{r^2\operatorname{sen}^2\theta}\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2}\right\},\qquad(1)$$

$$\left[\frac{\partial u}{\partial r}+hu\right]_{r=r_0}=0,\qquad(2)$$

$$u|_{t=0}=f(r,\ \theta,\ \varphi)\qquad(3)$$

es

$$u(r,\theta,\varphi,t)=\sum_{m,\,n=0}^{+\infty}\sum_{k=0}^{n}e^{-\left(\frac{a\mu_m^{(n)}}{r_0}\right)^2 t}\times$$

$$\times\frac{J_{n+\frac{1}{2}}\left(\frac{\mu_m^{(n)}r}{r_0}\right)}{\sqrt{r}}P_{n,k}(\cos\theta)\{A_{m,n,k}\cos k\varphi+B_{m,n,k}\operatorname{sen}k\varphi\},\quad (4)$$

donde $\mu_m^{(n)}$ son las raíces positivas de la ecuación

$$\mu_m^{(n)}J'_{n+\frac{1}{2}}(\mu_m^{(n)})+\left(r_0h-\frac{1}{2}\right)J_{n+\frac{1}{2}}(\mu_m^{(n)})=0,\quad (5)$$

$$A_{m,n,k}=$$

$$=\frac{\int_0^{r_0}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}f(r,\theta,\varphi)\,r^{\frac{3}{2}}J_{n+\frac{1}{2}}\left(\frac{\mu_m^{(n)}r}{r_0}\right)\operatorname{sen}\theta P_{n,k}(\cos\theta)\cos k\varphi\,dr\,d\theta\,d\varphi}{\varepsilon_k\frac{\lambda r_0^2(n+k)!}{(2n+1)(n-k)}\left[1+\frac{(r_0h+n)(r_0h-n-1)}{(\mu_m^{(n)})^2}\right]J^2_{n+\frac{1}{2}}(\mu_m^{(n)})}.\quad (6)$$

$$\varepsilon_k=\begin{cases}2 & \text{para}\quad k=0,\\ 1 & \text{para}\quad k\neq 0,\end{cases}\quad (7)$$

$$B_{m,n,k}=$$

$$=\frac{\int_0^{r_0}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}f(r,\theta,\varphi)\,r^{\frac{3}{2}}J_{n+\frac{1}{2}}\left(\frac{\mu_m^{(n)}r}{r_0}\right)\operatorname{sen}\theta P_{n,k}(\cos\theta)\operatorname{sen}k\varphi\,dr\,d\theta\,d\varphi}{\frac{\pi r_0^2(n+k)!}{(2n+1)(n-k)!}\left[1+\frac{(r_0h+n)(r_0h-n-1)}{(\mu_m^{(n)})^2}\right]J^2_{n+\frac{1}{2}}(\mu_m^{(n)})}.\quad (8)$$

51. $$u(r,\theta,\varphi,t)=\sum_{m,\,n=0}^{+\infty}\sum_{k=0}^{n}e^{-a^2\lambda_m^{(n)2}t}\times$$

$$\times\frac{Z_{n+\frac{1}{2}}(\lambda_m^{(n)}r)}{\sqrt{r}}P_{n,k}(\cos\theta)\{A_{m,n,k}\cos k\varphi+B_{m,n,k}\operatorname{sen}k\varphi\},\quad (1)$$

donde

$$Z_{n+\frac{1}{2}}(\lambda_m^{(n)}r)=J_{n+\frac{1}{2}}(\lambda_m^{(n)}r_1)N_{n+\frac{1}{2}}(\lambda_m^{(n)}r)-N_{n+\frac{1}{2}}(\lambda_m^{(n)}r_1)J_{n+\frac{1}{2}}(\lambda_m^{(n)}r),\quad (2)$$

$\lambda_m^{(n)}$ son las raíces positivas de la ecuación

$$Z_{n+\frac{1}{2}}(\lambda_m^{(n)}r_2)=0,\quad (3)$$

$$A_{m,n,k}=$$

$$=\frac{\int\limits_{r_1}^{r_0}\int\limits_0^{\pi}\int\limits_0^{2\pi} f(r,\theta,\varphi)\, r^{\frac{3}{2}} Z_{n+\frac{1}{2}}(\lambda_m^{(n)}r)\,\text{sen}\,\theta P_{n,k}(\cos\theta)\cos k\varphi\, dr\, d\theta\, d\varphi}{\varepsilon_k \frac{4\pi(n+k)!}{(2n+1)(n-k)!\,\pi^2\lambda_m^{(n)2}}\, \frac{J^2_{n+\frac{1}{2}}(\lambda_m^{(n)}r_1)-J^2_{n+\frac{1}{2}}(\lambda_m^{(n)}r_2)}{J^2_{n+\frac{1}{2}}(\lambda_m^{(n)}r_2)}}, \quad (4)$$

$$\varepsilon_k=\begin{cases} 2 & \text{para} \quad k=0,\\ 1 & \text{para} \quad k\neq 0,\end{cases} \quad (5)$$

$$B_{m,n,k}=$$

$$=\frac{\int\limits_{r_1}^{r_0}\int\limits_0^{\pi}\int\limits_0^{2\pi} f(r,\theta,\varphi)\, r^{\frac{3}{2}} Z_{n+\frac{1}{2}}(\lambda_m^{(n)}r)\,\text{sen}\,\theta P_{n,k}(\cos\theta)\,\text{sen}\, k\varphi\, dr\, d\theta\, d\varphi}{\frac{4\pi(n+k)!}{(2n+1)(n-k)!\,\pi^2\lambda_m^{(n)2}}\, \frac{J^2_{n+\frac{1}{2}}(\lambda_m^{(n)}r_1)-J^2_{n+\frac{1}{2}}(\lambda_m^{(n)}r_2)}{J^2_{n+\frac{1}{2}}(\lambda_m^{(n)}r_2)}}. \quad (6)$$

52. La solución del problema de contorno

$$\frac{\partial u}{\partial t}=a^2\left\{\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+\frac{2}{r}\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{1}{r^2\,\text{sen}\,\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\text{sen}\,\theta\frac{\partial u}{\partial\theta}\right)+\right.$$
$$\left.+\frac{1}{r^2\,\text{sen}^2\theta}\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2}\right\}, \quad r_1<r<r_2, \quad (1)$$

$$\left[\frac{\partial u}{\partial r}-h_1u\right]_{r=r_1}=0, \quad \left[\frac{\partial u}{\partial r}+h_2u\right]_{r=r_2}=0, \quad 0<t<+\infty, \quad (2)$$

$$u|_{t=0}=f(r,\theta,\varphi), \quad r_1<r<r_2, \quad (3)$$

es

$$u(r,\theta,\varphi,t)=\sum_{m,\,n=0}^{+\infty}\sum_{k=0}^{+\infty} e^{-a^2\lambda_m^{(n)2}t}\times$$
$$\times\frac{Z_{n+\frac{1}{2}}(\lambda_m^{(n)}r)}{\sqrt{r}}P_{n,k}(\cos\theta)\{A_{m,n,k}\cos k\varphi+B_{m,n,k}\,\text{sen}\,k\varphi\}, \quad (1')$$

$$Z_{n+\frac{1}{2}}(\lambda_m^{(n)}r)=\left[\lambda_m^{(n)}J'_{n+\frac{1}{2}}(\lambda_m^{(n)}r_1)-\left(h_1+\frac{1}{2r_1}\right)J_{n+\frac{1}{2}}(\lambda_m^{(n)}r_1)\right]\times$$
$$\times N_{n+\frac{1}{2}}(\lambda_m^{(n)}r)-\left[\lambda_m^{(n)}N'_{n+\frac{1}{2}}(\lambda_m^{(n)}r_1)-\right.$$
$$\left.-\left(h_1+\frac{1}{2r_1}\right)N_{n+\frac{1}{2}}(\lambda_m^{(n)}r_1)\right]J_{n+\frac{1}{2}}(\lambda_m^{(n)}r), \quad (2')$$

$$A_{m,n,k}=$$

$$=\frac{\int\limits_{r_1}^{r_2}\int\limits_0^{\pi}\int\limits_0^{2\pi} f(r,\theta,\varphi)\, r^{\frac{3}{2}} Z_{n+\frac{1}{2}}(\lambda_m^{(n)}r)\,\text{sen}\,\theta P_{n,k}(\cos\theta)\cos k\varphi\, dr\, d\theta\, d\varphi}{\varepsilon_k \frac{2\pi}{2n+1}\cdot\frac{(n+k)!}{(n-k)!}\int\limits_{r_1}^{r_2} rZ^2_{n+\frac{1}{2}}(\lambda_m^{(n)}r)\,dr}, \quad (3')$$

$$\varepsilon_k=\begin{cases} 2 & \text{para} \quad k=0,\\ 1 & \text{para} \quad k\neq 0,\end{cases}$$

$$B_{m,n,k}=$$

$$=\frac{\int\limits_{r_1}^{r_2}\int\limits_0^{\pi}\int\limits_0^{2\pi} f(r,\theta,\varphi)\, r^{\frac{3}{2}} Z_{n+\frac{1}{2}}(\lambda_m^{(n)}r)\,\text{sen}\,\theta P_{n,k}(\cos\theta)\,\text{sen}\, k\varphi\, dr\, d\theta\, d\varphi}{\frac{2\pi}{2n+1}\cdot\frac{(n+k)!}{(n-k)!}\int\limits_{r_1}^{r_2} rZ^2_{n+\frac{1}{2}}(\lambda_m^{(n)}r)\,dr}, \quad (4)$$

$$\int\limits_{r_1}^{r_2} rZ^2_{n+\frac{1}{2}}(\lambda_m^{(n)}r)\,dr=$$

$$=\frac{2}{\pi^2(\lambda_m^{(n)})^2\left[\lambda_m^{(n)}J'_{n+\frac{1}{2}}(\lambda_m^{(n)}r_2)+\left(h_2-\frac{1}{2r_2}\right)J_{n+\frac{1}{2}}(\lambda_m^{(n)}r_2)\right]^2}\times$$

$$\times\left\{\left[\left(h_2-\frac{1}{2r_2}\right)^2+(\lambda_m^{(n)})^2-\frac{\left(n+\frac{1}{2}\right)^2}{r_2^2}\right]\times\right.$$

$$\times\left[\lambda_m^{(n)}J'_{n+\frac{1}{2}}(\lambda_m^{(n)}r_1)-\left(h_1+\frac{1}{2r_1}\right)J_{n+\frac{1}{2}}(\lambda_m^{(n)}r_1)\right]-$$

$$-\left[\left(h_1+\frac{1}{2r_1}\right)^2+(\lambda_m^{(n)})^2-\frac{\left(n+\frac{1}{2}\right)^2}{r_1^2}\right]\times$$

$$\left.\times\left[\lambda_m^{(n)}J'_{n+\frac{1}{2}}(\lambda_m^{(n)}r_2)+\left(h_2-\frac{1}{2r_2}\right)J_{n+\frac{1}{2}}(\lambda_m^{(n)}r_2)\right]\right\},$$

donde $\lambda_m^{(n)}$ son las raíces positivas de la ecuación

$$\lambda_m^{(n)}Z'_{n+\frac{1}{2}}(\lambda_m^{(n)}r_2)+\left(h_2-\frac{1}{2r_2}\right)Z_{n+\frac{1}{2}}(\lambda_m^{(n)}r_2)=0. \quad (6)$$

b) Medios heterogéneos; factores concentrados

53. La solución del problema de contorno

$$c_1\rho_1\frac{\partial u}{\partial t}=k_1\left\{\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right\},\quad 0\leqslant r<r_0,\qquad 0\leqslant\varphi\leqslant 2\pi,\tag{1}$$

$$c_2\rho_2\frac{\partial u}{\partial t}=k_2\left\{\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right\},\quad r_0<r<r_1,\qquad 0<z<l,\ 0<t<+\infty,\tag{1'}$$

$$\left.\begin{aligned} u(r_0-0,\ \varphi,\ z,\ t)&=u(r_0+0,\ \varphi,\ z,\ t),\\ k_1u_r(r_0-0,\ \varphi,\ z,\ t)&=k_2u_r(r_0+0,\ \varphi,\ z,\ t),\end{aligned}\right\}\ 0\leqslant\varphi\leqslant 2\pi,\ 0<z<l,\ 0<t<+\infty,\tag{2, 2'}$$

$$u(r_1,\ \varphi,\ z,\ t)=0,\tag{2''}$$

$$u(r,\ \varphi,\ z,\ 0)=f(r,\ \varphi,\ z)\tag{3}$$

es

$$u(r,\ \varphi,\ z,\ t)=\sum_{m,\ n,\ p=0}^{+\infty}R_{m,\ n,\ p}(r)\,e^{-\lambda^2_{m,\ n,\ p}t}\times\{A_{m,\ n,\ p}\cos n\varphi+B_{m,\ n,\ p}\operatorname{sen} n\varphi\}\operatorname{sen}\frac{m\pi z}{l},\tag{4}$$

donde $\lambda_{m,\ n,\ p}$ son las raíces de la ecuación trascedente

$$\begin{vmatrix} J_n(\bar\omega r_0) & N_n(\bar{\bar\omega} r_0) & J_n(\bar{\bar\omega} r_0)\\ k_1\bar\omega J'_n(\bar\omega r_0) & k_2\bar{\bar\omega} N'_n(\bar{\bar\omega} r_0) & k_2\bar{\bar\omega} J'_n(\bar{\bar\omega} r_0)\\ 0 & N_n(\bar{\bar\omega} r_1) & J_n(\bar{\bar\omega} r_1)\end{vmatrix}=0,\tag{5}$$

$$\bar\omega=\sqrt{\frac{c_1\rho_1}{k_1}\lambda^2-\frac{m^2\pi^2}{l^2}},\qquad \bar{\bar\omega}=\sqrt{\frac{c_2\rho_2}{k_2}\lambda^2-\frac{m^2\pi^2}{l^2}},\tag{6}$$

$$R_{m,\ n,\ p}(r)=\begin{cases}[J_n(\bar{\bar\omega}_{m,\ n,\ p}r_0)N_n(\bar{\bar\omega}_{m,\ n,\ p}r_1)-\\ \quad -N_n(\bar{\bar\omega}_{m,\ n,\ p}r_0)J_n(\bar{\bar\omega}_{m,\ n,\ p}r_1)]J_n(\bar\omega_{m,\ n,\ p}r), & 0\leqslant r\leqslant r_0,\\ [J_n(\bar{\bar\omega}_{m,\ n,\ p}r)N_n(\bar{\bar\omega}_{m,\ n,\ p}r_1)-\\ \quad -N_n(\bar{\bar\omega}_{m,\ n,\ p}r)J_n(\bar{\bar\omega}_{m,\ n,\ p}r_1)]J_n(\bar\omega_{m,\ n,\ p}r_0), & r_0\leqslant r\leqslant r_1,\end{cases}\tag{7}$$

$$A_{m,\ n,\ p}=\frac{\displaystyle\int_0^{r_1}r\mu\,dr\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^{l}f(r,\ \varphi,\ z)\,R_{m,\ n,\ p}(r)\cos n\varphi\operatorname{sen}\frac{m\pi z}{l}\,dz}{\displaystyle\varepsilon_n\frac{\pi l}{2}\int_0^{r_1}r\mu R^2_{m,\ n,\ p}(r)\,dr},$$

$$\varepsilon_n=\begin{cases}1, & n\neq 0,\\ 2, & n=0,\end{cases}\tag{8}$$

$$B_{m,n,p}=\frac{\int\limits_0^{r_1} r\mu\,dr\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^{l} f(r,\varphi,z)\,R_{m,n,p}(r)\,\mathrm{sen}\,n\varphi\,\mathrm{sen}\,\frac{m\pi z}{l}\,dz}{\frac{\pi l}{2}\int\limits_0^{r_1} r\mu R^2_{m,n,p}(r)\,dr}, \quad (9)$$

$$\mu=\begin{cases} c_1\rho_1 & \text{para} \quad 0\leqslant r<r_0,\\ c_2\rho_2 & \text{para} \quad r_0<r<r_1.\end{cases} \quad (10)$$

Las funciones $R_{m,n,p_1}(r)$ y $R_{m,n,p_2}(r)$ para diferentes p_1 y p_2 son ortogonales con respecto al núcleo $r\mu$ sobre el segmento $0\leqslant r\leqslant r_1$.

54. La solución del problema de contorno

$$\frac{\partial u}{\partial t}=a^2\left\{\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r}\right\}, \quad r_1<r<r_2, \quad 0<t<+\infty, \quad (1)$$

$$\pi r_1^2 c^*\rho^*\frac{dU}{dt}=2\pi r_1\frac{\partial u}{\partial r}\bigg|_{r=r_1}, \quad U(t)=u|_{r=r_1},$$

$$\frac{\partial u}{\partial r}\bigg|_{r=r_2}=0, \quad 0<t<+\infty, \quad (2)$$

$$u(r,0)=f(r), \quad r_1<r<r_2, \quad (3)$$

donde λ es la conductibilidad térmica del material del tubo; c^* y ρ^*, el calor específico y la densidad de masa del líquido, resulta

$$u(r,t)=\sum_{n=1}^{+\infty}A_n e^{-a^2\lambda_n^2 t}Z_0(\lambda_n r), \quad (4)$$

donde

$$Z_0(\lambda_n r)=J_0'(\lambda_n r_2)\,N_0(\lambda_n r)-N_0'(\lambda_n r_2)\,J_0(\lambda_n r), \quad (5)$$

λ_n son las raíces de la ecuación trascedente

$$Z_0'(\lambda_n r_1)=-\lambda_n\frac{a^2 r_1 c^*\rho^*}{2\lambda}Z_0(\lambda_n r_1), \quad (6)$$

$$A_n=\frac{\int\limits_{r_1}^{r_2} rf(r)\,Z_0(\lambda_n r)\,dr-\frac{a^2 r_1^2 c^*\rho^*}{2\lambda}f(r_1)\,Z_0(\lambda_n r_1)}{\int\limits_{r_1}^{r_2} r\,[Z_0(\lambda_n r)]^2\,dr-\frac{a^2 r_1^2 c^*\rho^*}{2\lambda}[Z_0(\lambda_n r_1)]^2}\ ^{*)}. \quad (7)$$

55. La solución del problema de contorno

$$\frac{\partial u}{\partial t}=a^2\left\{\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r}\right\}, \quad r_1<r<r_2, \quad 0<t<+\infty, \quad (1)$$

$$\pi r_1^2 c^*\rho^*\frac{dU}{dt}=2\pi r_1\lambda\frac{\partial u}{\partial r}\bigg|_{r=r_1}, \quad U(t)=u|_{r=r_1},$$

$$\frac{\partial u}{\partial r}\bigg|_{r=r_2}=-hu|_{r=r_2}, \quad 0<t<+\infty, \quad (2)$$

$$u(r,0)=f(r), \quad r_1<r<r_2, \quad (3)$$

---

*) Véase (21) y (27) en el problema 57.

se obtiene de la solución del problema anterior si suponer

$$Z_0(\lambda_k r)=[\lambda_k J_0'(\lambda_k r_2)+hJ_0(\lambda_k r_2)]\,N_0(\lambda_k r)-$$
$$-[\lambda_k N_0'(\lambda_k r_2)+hN_0(\lambda_k r_2)]\,J_0(\lambda_k r). \qquad (4)$$

56. Para determinar la velocidad $v(r, t)$ de las partículas del líquido*) y la velocidad angular $\omega(t)$ del cilindro obtenemos el problema de contorno

$$\frac{\partial v}{\partial t}=\nu\left\{\frac{\partial^2 v}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial r}-\frac{v}{r^2}\right\}, \quad r_1<r<r_2, \quad 0<t<+\infty, \qquad (1)$$

$$v|_{r=r_1}=r_1\omega(t), \quad v|_{r=r_2}=0, \quad K\frac{d\omega}{dt}=M+2\pi r_1^2\rho\nu\left[\frac{\partial v}{\partial r}-\frac{v}{r}\right]_{r=r_1},$$
$$0<t<+\infty, \qquad (2)$$

$$v(r, 0)=0, \quad r_1<r<r_2. \qquad (3)$$

Eliminando $\omega(t)$ de las condiciones de frontera (2), obtenemos:

$$\frac{1}{r_1}K\frac{\partial v}{\partial t}\bigg|_{r=r_1}=M+2\pi r_1^2\rho\nu\left[\frac{\partial v}{\partial r}-\frac{v}{r}\right]_{r=r_1}, \quad v|_{r=r_2}=0, \qquad (2')$$
$$0<t<+\infty.$$

Buscamos la solución particular estacionaria de la ecuación (1)

$$V=V(r), \qquad (4)$$

que satisface las condiciones heterogéneas de frontera (2')**). Si después suponer

$$v(r, t)=u(r, t)+V(r), \qquad (5)$$

entonces para $u(r, t)$ obtenemos el problema de contorno

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\nu\left\{\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r}-\frac{u}{r^2}\right\}, \quad r_1<r<r_2, \quad 0<t<+\infty, \qquad (6)$$

$$K\frac{\partial u}{\partial t}\bigg|_{r=r_1}=2\pi r_1^2\rho\nu\left[\frac{\partial u}{\partial r}-\frac{u}{r}\right]_{r=r_1}, \quad u|_{r=r_2}=0, \quad 0<t<+\infty, \qquad (7)$$

$$u(r, 0)=-V(r), \quad r_1<r<r_2. \qquad (8)$$

Resolviendo el problema de contorno (6), (7), (8) y determinando mediante (5) $v(r, t)$, de la condición de frontera $v|_{r=r_1}=k_1\omega(t)$ hallamos también $\omega(t)$.

El problema de contorno (6), (7), (8) puede ser resuelto análogamente al problema anterior. Las soluciones particulares de la ecuación (6) que satisfacen las condiciones de frontera (7) las buscamos en la forma

$$U_k(r, t)=e^{-\nu\lambda_k^2 t}R_k(r). \qquad (9)$$

Para $R_k(r)$ obtenemos la ecuación

$$\frac{d^2R}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{dR}{dr}+\left(\lambda_k^2-\frac{1}{r^2}\right)R=0, \qquad (10)$$

$R_k(r)=Z_1(\lambda_k r)$, donde $Z_1(z)$ es la solución general de la ecuación de las funciones cilíndricas de primer orden en que las constantes indefinidas son eligidas

*) $v(r, t)=v_\varphi(r, t)$ (véase la solución del problema 7).

**) $V(r)$ es el límite a que tiende la velocidad de las partículas del líquido cuando $t\to+\infty$.

de modo que la condición de frontera $R_k(r_2) = 0$ se cumpla para cualesquiera λ_k:

$$Z_1(\lambda_k r) = N_1(\lambda_k r_2) J_1(\lambda_k r) - J_1(\lambda_k r_2) N_1(\lambda_k r). \tag{11}$$

Exigiendo el cumplimiento de la primera de las condiciones de frontera (7), obtenemos la ecuación para determinar los valores propios

$$-\lambda_k^2 K Z_1(\lambda_k r_1) = 2\pi r_1^2 \rho\nu \left[\lambda_k Z_1'(\lambda_k r_1) - \frac{Z_1(\lambda_k r_1)}{r_1} \right]. \tag{12}$$

Mediante las relaciones (14) del problema 34 y la igualdad (12) hallamos las relaciones que expresan la ortogonalidad generalizada de las funciones propias $Z_1(\lambda_k r)$,

$$\int_{r_1}^{r_2} r Z_1(\lambda_k r) Z_1(\lambda_n r)\, dr + \frac{K}{2\pi r_1 \rho\nu} Z_1(\lambda_k r_1) Z_1(\lambda_n r_1) = 0\ ^{*)} \tag{13}$$

para $k \neq n$

$$u(r, t) = \sum_{n=1}^{+\infty} A_n e^{-a^2\lambda_n^2 t} Z_1(\lambda_n r), \tag{14}$$

donde

$$A_n = -\frac{\int_{r_1}^{r_2} r V(r) Z_1(\lambda_n r)\, dr + \frac{K}{2\pi r_1 \rho\nu} V(r_1) Z_1(\lambda_n r_1)}{\int_{r_1}^{r_2} r [Z_1(\lambda_n r)]^2\, dr + \frac{K}{2\pi r_1 \rho\nu} [Z_1(\lambda_n r_1)]^2}. \tag{15}$$

57. *Resolución.* Al igual que en el problema 33 obtenemos:

$$\frac{\partial H}{\partial t} = a^2 \left\{ \frac{\partial^2 H}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial H}{\partial r} \right\}, \quad r_1 < r < r_2, \quad 0 < t < +\infty, \quad a^2 = \frac{c^2}{4\pi\mu\sigma}, \tag{1}$$

$$H(r, 0) = 0, \qquad r_1 < r < r_2, \tag{2}$$

$$H(r_2, t) = H_0, \qquad 0 < t < +\infty, \tag{3}$$

donde H es la componente del campo magnético en el sentido del eje z que coincide con el eje del cilindro (las otras componentes del vector de la intensidad del campo magnético son iguales a cero).

Hallemos la condición de frontera para $r = r_1$. Escribimos las ecuaciones de Maxwell

$$\text{rot}\, H = \frac{4\pi\sigma}{c} E + \frac{\varepsilon}{c} \frac{\partial E}{\partial t}, \tag{4}$$

$$\text{rot}\, E = -\frac{\mu}{c} \frac{\partial H}{\partial t}; \tag{5}$$

en las coordenadas cilíndricas

$$\frac{1}{r} \frac{\partial H_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial H_\varphi}{\partial z} = \left(\frac{4\pi\sigma}{c} + \frac{\varepsilon}{c} \frac{\partial}{\partial t} \right) E_r, \tag{6}$$

$$\frac{\partial H_r}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial r} = \left(\frac{4\pi\sigma}{c} + \frac{\varepsilon}{c} \frac{\partial}{\partial t} \right) E_\varphi, \tag{6'}$$

*) Véanse (21) y (27) en el problema 57.

$$\frac{1}{r}\frac{\partial (rH_\varphi)}{\partial r}-\frac{1}{r}\frac{\partial H_r}{\partial \varphi}=\left(\frac{4\pi\sigma}{c}+\frac{\varepsilon}{c}\frac{\partial}{\partial t}\right)E_z, \tag{6''}$$

$$\frac{1}{r}\frac{\partial E_z}{\partial \varphi}-\frac{\partial E_\varphi}{\partial z}=-\frac{\mu}{c}\frac{\partial H_r}{\partial t}, \tag{7}$$

$$\frac{\partial E_r}{\partial z}-\frac{\partial E_z}{\partial r}=-\frac{\mu}{c}\frac{\partial H_\varphi}{\partial t}, \tag{7'}$$

$$\frac{1}{r}\frac{\partial (rE_\varphi)}{\partial r}-\frac{1}{r}\frac{\partial E_r}{\partial \varphi}=-\frac{\mu}{c}\frac{\partial H_z}{\partial t}. \tag{7''}$$

Dado que despreciamos las corrientes del desplazamiento y debido a que $H_r = H_\varphi = 0$ (véase la solución del problema 33), entonces de (6′) obtenemos:

$$-\frac{\partial H_z}{\partial r}=\frac{4\pi\sigma}{c}E_\varphi. \tag{8}$$

Integrando (5) sobre la sección transversal de la cavidad interior utilizando para eso la fórmula de Stokes y usando la condición de que en todas partes de la cavidad H es igual al valor de H sobre la superficie interior del tubo, obtenemos:

$$2E_\varphi|_{r=r_1}=-\frac{r_1}{c}\frac{\partial H_z}{\partial t}\Big|_{r=r_1}. \tag{9}$$

De (8) y (9) obtenemos por fin la condición de frontera buscada

$$\frac{\partial H_z}{\partial t}\Big|_{r=r_1}=\frac{2\mu}{r_1}a^2\frac{\partial H_z}{\partial r}\Big|_{r=r_1},$$

es decir,

$$\frac{\partial H}{\partial t}\Big|_{r=r_1}=\frac{\mu}{r_1}a^2\frac{\partial H}{\partial r}\Big|_{r=r_1}, \quad 0<t<+\infty. \tag{3'}$$

Para liberarse de la heterogeneidad en la condición de frontera (3), buscamos la solución del problema de contorno (1), (2), (3), (3′) en la forma

$$H(r, t)=H_0+u(r, t). \tag{10}$$

Para $u(r, t)$ obtenemos el problema de contorno

$$\frac{\partial u}{\partial t}=a^2\left\{\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r}\right\}, \quad r_1<r<r_2, \quad 0<t<+\infty, \tag{11}$$

$$u(r, 0)=-H_0, \quad r_1<r<r_2, \tag{12}$$

$$u(r_2, t)=0, \quad 0<t<+\infty, \tag{13}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{r=r_1}=\frac{2\mu}{r_1}a^2\frac{\partial u}{\partial r}\Big|_{r=r_1}. \tag{13'}$$

Las soluciones particulares de la ecuación (11) que satisfacen las condiciones de frontera (13) las buscamos en la forma

$$U_k(r, t)=e^{-a^2\lambda_k^2 t}R_k(r). \tag{14}$$

Sustituyendo (14) en (11), obtenemos

$$\frac{d^2R_k}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{dR_k}{dr}+\lambda_k^2R_k=0. \tag{15}$$

Por consiguiente,

$$R_k(r) = Z_0(\lambda_k r), \tag{15'}$$

donde $Z_0(z) = AN_0(z) + BJ_0(z)$ es la solución general de la ecuación de las funciones cilíndricas de orden nulo. Eligimos las constantes A y B de tal modo que la condición (13) para $Z_0(\lambda_k r)$ se cumpla para cualquier valor de λ_k; por ejemplo, hacemos

$$Z_0(\lambda_k r) = N_0(\lambda_k r_2)\, J_0(\lambda_k r) - J_0(\lambda_k r_2)\, N_0(\lambda_k r). \tag{16}$$

Sustituyendo con (14) en (13'), hallamos

$$\left.\frac{dR_k(r)}{dr}\right|_{r=r_1} = -\lambda_k^2 \frac{r_1}{2\mu} R_k(r)\,|_{r=r_1}, \tag{17}$$

ó

$$Z_0'(\lambda_k r_1) = -\lambda_k \frac{r_1}{2\mu} Z_0(\lambda_k r_1) \tag{18}$$

Tal es la ecuación de la cual se hallan los valores propios $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \ldots$ del problema de contorno. De la ecuación (15) y de la ecuación que se obtiene mediante la sustitución de k en (15) por n obtenemos, multiplicando respectivamente por $R_n(r)$ y $R_k(r)$, restando los resultados e integrando:

$$(\lambda_k^2 - \lambda_n^2) \int_{r_1}^{r_2} rR_k(r)\, R_n(r)\, dr = \left\{ r \left[R_k(r) \frac{dR_n(r)}{dr} - R_n(r) \frac{dR_k(r)}{dr} \right] \right\}_{r=r_1}^{r=r_2}. \tag{19}$$

En virtud de la condición de frontera (13) y (17) obtenemos

$$(\lambda_k^2 - \lambda_n^2) \left\{ \int_{r_1}^{r_2} rR_k(r)\, R_n(r)\, dr - \frac{r_1^2}{2\mu} R_k(r_1)\, R_n(r_1) \right\} = 0, \tag{20}$$

de donde para $n \neq k$ hallamos:

$$\int_{r_1}^{r_2} rR_k(r)\, R_n(r)\, dr - \frac{r_1^2}{2\mu} R_k(r_1)\, R_n(r_1) = 0. \tag{21}$$

De tal manera, las funciones $R_k(r)$ y $R_n(r)$ son ortogonales generalizadamente (la relación (21) es la expresión de la ortogonalidad generalizada).

La resolución del problema de contorno (11), (12), (13) buscamos en la forma de la suma de la serie

$$u(r, t) = \sum_{k=1}^{+\infty} A_k e^{-a^2\lambda_k^2 t} R_k(r), \tag{22}$$

$u(r, t)$ satisface la ecuación (11) (si la serie converge suficientemente bien) y las condiciones de frontera (13), (13'). Exigeremos el cumplimiento de las condiciones iniciales, suponiendo primero para la comunidad que $u(r, 0) = f(r)$. Suponiendo en (22) $t = 0$, obtenemos

$$f(r) = \sum_{k=1}^{+\infty} A_k R_k(r); \tag{23}$$

para $r=r_1$

$$f(r_1)=\sum_{k=1}^{+\infty} A_k R_k(r_1). \tag{24}$$

Multiplicamos (23) por $rR_n(r)$ e integramos con respecto a r entre r_1 y r_2:

$$\int_{r_1}^{r_2} rf(r)\,R_n(r)\,dr=\sum_{k=1}^{+\infty} A_k \int_{r_1}^{r_2} rR_k(r)\,R_n(r)\,dr. \tag{25}$$

Multiplicamos (24) por $\frac{r_1^2}{\mu}R_n(r_1)$:

$$\frac{r_1^2}{2\mu}f(r_1)\,R_n(r_1)=\sum_{k=1}^{+\infty} A_k\frac{r_1^2}{2\mu}R_k(r_1)\,R_n(r_1). \tag{26}$$

Sumando (25) y (26), obtenemos en virtud de (21)

$$\int_{r_1}^{r_2} rf(r)\,R_n(r)\,dr-\frac{r_1^2}{2\mu}f(r_1)\,R_n(r_1)=A_n\left\{\int_{r_1}^{r_2} rR_n^2(r)\,dr-\frac{r_1^2}{2\mu}R_n^2(r_1)\right\}. \tag{27}$$

Por consiguiente,

$$A_n=\frac{\displaystyle\int_{r_1}^{r_2} rf(r)\,R_n(r)\,dr-\frac{r_1^2}{2\mu}f(r_1)\,R_n(r_1)}{\displaystyle\int_{r_1}^{r_2} rR_n^2(r)\,dr-\frac{r_1^2}{2\mu}R_n^2(r_1)}. \tag{28}$$

Mediante la igualdad (16) del problema 34, el wronskiano de las funciones cilíndricas y la condición de frontera (18) obtenemos:

$$\int_{r_1}^{r_2} rR_n^2(r)\,dr=\frac{2}{\pi^2\lambda_n^2}-\frac{r_1^2}{2}\left(1+\frac{r_1^2\lambda_n^2}{4\mu^2}\right)Z_0^2(\lambda_n r_1). \tag{29}$$

Sustituyendo en el numerador de (28) $f(r)=-H_0$ y utilizando el wronskiano de las funciones cilíndricas, obtenemos para el numerador indicado el valor

$$H_0\left\{\left(\frac{2\mu}{\lambda_n^2}+\frac{r_1^2}{2\mu}\right)Z_0(\lambda_n r_1)-\frac{2}{\pi\lambda_n^2}\right\}. \tag{30}$$

En virtud de (29) y (30) la igualdad (28) toma la forma

$$A_n=H_0\frac{\left(\frac{2\mu}{\lambda_n^2}+\frac{r_1^2}{2\mu}\right)Z_0(\lambda_n r_1)-\frac{2}{\pi\lambda_n^2}}{\frac{2}{\pi^2\lambda_n^2}-\frac{r_1^2}{2}\left(\frac{1}{\mu}+1+\frac{r_1^2\lambda_n^2}{4\mu^2}\right)Z_0^2(\lambda_n r_1)}, \tag{31}$$

donde

$$Z_0(\lambda_n r_1)=N_0(\lambda_n r_2)\,J_0(\lambda_n r_1)-J_0(\lambda_n r_2)\,N_0(\lambda_n r_1). \tag{32}$$

58. La solución del problema de contorno

$$c_1\rho_1 \frac{\partial u}{\partial t} = k_1 \left\{ \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \operatorname{sen} \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\operatorname{sen} \theta \frac{\partial u}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \operatorname{sen}^2 \theta} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} \right\},$$
$$0 \leqslant r < r_0, \qquad (1)$$

$$c_2\rho_2 \frac{\partial u}{\partial t} = k_2 \left\{ \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \operatorname{sen} \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\operatorname{sen} \theta \frac{\partial u}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \operatorname{sen}^2 \theta} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} \right\},$$
$$r_0 < r \leqslant r_1, \qquad (1')$$

$$\left.\begin{aligned} u(r_0-0,\ \theta,\ \varphi,\ t) &= u(r_0+0,\ \theta,\ \varphi,\ t), \\ k_1u_r(r_0-0,\ \theta,\ \varphi,\ t) &= k_2u_r(r_0+0,\ \theta,\ \varphi,\ t), \end{aligned}\right\} \begin{aligned} &0 \leqslant \theta \leqslant \pi,\ 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi, && (2) \\ &0 < t < +\infty, && (2') \end{aligned}$$

$$u(r_1,\ \theta,\ \varphi,\ t) = 0, \qquad (2'')$$

$$u(r,\ \theta,\ \varphi,\ 0) = f(r,\ \theta,\ \varphi) \qquad (3)$$

es

$$u(r,\ \theta,\ \varphi,\ t) =$$
$$= \sum_{n,\ p=0}^{+\infty} \sum_{m=0}^{+\infty} R_{mnp}(r)\, P_n^{(m)}(\cos\theta)\, e^{-\lambda_{mnp}^2 t} \{A_{mnp} \cos m\varphi + B_{mnp} \operatorname{sen} m\varphi\},$$

donde los valores propios λ_{mnp} y las funciones propias $R_{mnp}(r)$ se hallan análogamente a como se hizo en los problemas 53 y 24.

§ 3. Método de representaciones integrales

1. Utilización de la integral de Fourier

59. La solución del problema de contorno

$$u_t = a^2\Delta_3 u, \quad -\infty < x,\ y,\ z < +\infty, \quad 0 < t < +\infty, \qquad (1)$$

$$u|_{t=0} = f(x,\ y,\ z), \quad -\infty < x,\ y,\ z < +\infty, \qquad (2)$$

donde $\Delta_3 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$, es:

$$u(x,\ y,\ z,\ t) = \frac{1}{(2a\sqrt{\pi t})^3} \iiint_{-\infty}^{+\infty} f(\xi,\ \eta,\ \zeta)\, e^{-\frac{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2}{4a^2t}}\, d\xi\, d\eta\, d\zeta. \qquad (3)$$

Si f no depende de z, entonces

$$u(x,\ y,\ t) = \frac{1}{(2a\sqrt{\pi t})^2} \iint_{-\infty}^{+\infty} f(\xi,\ \eta)\, e^{-\frac{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2}{4a^2t}}\, d\xi\, d\eta. \qquad (3')$$

Indicación. La imagen de Fourier de la función $F(x,\ y,\ z)$ arbitraria *)

*) No nos detenemos sobre las limitaciones de $F(x,\ y,\ z)$, para las cuales a ciencia cierta existe $\overline{F}(\lambda,\ \mu,\ \nu)$ y tiene lugar la fórmula de inversión (5), remitiendo, con respecto a este problema, a la literatura especializada.

definida para $-\infty < x,\ y,\ z < +\infty$ se indica:

$$\overline{F}(\lambda,\ \mu,\ \nu)=\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\iiint_{-\infty}^{+\infty} F(\xi,\ \eta,\ \zeta)\, e^{i[\lambda\xi+\mu\eta+\nu\zeta]}\, d\xi\, d\eta\, d\zeta. \qquad (4)$$

El paso de F a $\overline{F}$ según la fórmula (4) se denomina transformación de Fourier con respecto al núcleo $e^{i[\lambda\xi+\mu\eta+\nu\zeta]}$. El paso de la imagen $\overline{F}$ al original F se realiza según la fórmula

$$F(x,\ y,\ z)=\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\iiint_{-\infty}^{+\infty} \overline{F}(\lambda,\ \mu,\ \nu)\, e^{-i[\lambda x+\mu y+\nu z]}\, d\lambda\, d\mu\, d\nu. \qquad (5)$$

Multiplicando ambos miembros de las igualdades (1) y (2) por $e^{i[\lambda\xi+\mu\eta+\nu\zeta]}$ e integrando con respecto a ξ, η, ζ entre $-\infty$ y $+\infty$, obtenemos la ecuación diferencial ordinaria y la condición inicial para la imagen de Fourier $\bar{u}$ de la solución u del problema de contorno (1), (2). Hallando $\bar{u}$ y utilizando la transformación inversa de Fourier, obtenemos u.

En el caso cuando f no depende de z el problema de contorno (1), (2) se convierte en el problema de contorno

$$u_t = a^2\Delta_2 u, \quad -\infty < x,\ y < +\infty, \quad 0 < t < +\infty, \qquad (1')$$

$$u\,|_{t=0} = f(x,\ y), \quad -\infty < x,\ y < +\infty, \qquad (2')$$

donde

$$\Delta_2=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}.$$

Para resolver el problema de contorno (1′), (2″) se debe utilizar la transformación de Fourier para la función de dos variables

$$\overline{F}(\lambda,\ \mu)=\frac{1}{2\pi}\iint_{-\infty}^{+\infty} F(\xi,\ \eta)\, e^{i[\lambda\xi+\mu\eta]}\, d\xi\, d\eta. \qquad (4')$$

Con esto la fórmula de inversión es de la forma

$$F(x,\ y)=\frac{1}{2\pi}\iint_{-\infty}^{+\infty} F(\lambda,\ \mu)\, e^{-i[\lambda x+\mu y]}\, d\lambda\, d\mu. \qquad (5')$$

60. La solución del problema de contorno

$$u_t=a^2\Delta_3 u+g(x,\ y,\ z,\ t), \quad -\infty < x,\ y,\ z < +\infty, \quad 0 < t < +\infty, \qquad (1)$$

$$u\,|_{t=0}=0, \quad -\infty < x,\ y,\ z < +\infty \qquad (2)$$

es:

$$u(x,\ y,\ z,\ t)=$$

$$=\frac{1}{(2a\sqrt{\pi})^3}\int_0^t \frac{d\tau}{(t-\tau)^{3/2}}\iiint_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2}{4a^2(t-\tau)}}\, g(\xi,\ \eta,\ \zeta\tau)\, d\xi\, d\eta\, d\zeta. \quad (3)$$

Si $g(x, y, z, t)$ no depende de t, es decir, $g=g(x, y, z)$, entonces la expresión (3) para la solución se puede llevar a la forma

$$u(x, y, z, t)=\frac{1}{4\pi a^2}\int\int\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{g(\xi, \eta, \zeta)}{r}\left\{1-\Phi\left(\frac{r}{2a\sqrt{t}}\right)\right\}d\xi d\eta d\zeta, \qquad (4)$$

donde $\Phi(\alpha)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\alpha}e^{-\omega^2}d\omega$ y $r=$

$=\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2}$. Si $g(x, y, z, t)$ no depende de z, entonces

$$u(x, y, t)=\frac{1}{4\pi a^2}\int\int_{-\infty}^{+\infty}\left\{\int_0^t g(\xi, \eta, \tau)\frac{e^{-\frac{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2}{4a^2(t-\tau)}}}{t-\tau}d\tau\right\}d\xi d\eta.$$

Indicación. Para $g=g(x, y, z)$ la expresión (3) se transforma en (4) mediante la sustitución

$$\mu=\frac{r}{2a\sqrt{t-\tau}}.$$

61. $u(x, y, z, t)=\frac{1}{(2a\sqrt{\pi t})^3}\int_{-\infty}^{+\infty}d\xi\int_{-\infty}^{+\infty}d\eta\int_0^{+\infty}\times$

$$\times f(\xi, \eta, \zeta)\left[e^{-\frac{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2}{4a^2t}}-e^{-\frac{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z+\zeta)^2}{4a^2t}}\right]d\zeta. \qquad (1)$$

Si $f(x, y, z)$ no depende de y, entonces

$$u(x, z, t)=\frac{1}{(2a\sqrt{\pi t})^2}\int_{-\infty}^{+\infty}d\xi\int_0^{+\infty}\times\left[e^{-\frac{(x-\xi)^2+(z-\zeta)^2}{4a^2t}}-e^{-\frac{(x-\xi)^2+(z+\zeta)^2}{4a^2t}}\right]\times$$

$$\times f(\xi, \zeta)\,d\zeta. \qquad (2)$$

Indicación. Utilizar la transformación de Fourier con respecto al núcleo

$$\frac{1}{2^{1/2}\pi^{3/2}}e^{i[\lambda\xi+\mu\eta]}\operatorname{sen}\nu\zeta$$

en el semiespacio $-\infty<\xi, \eta<+\infty, 0<\zeta<+\infty$. Si f no depende de y, entonces se debe utilizar la transformación de Fourier con respecto al núcleo

$$\frac{1}{\pi}e^{i\lambda\xi}\operatorname{sen}\nu\zeta$$

para $-\infty<\xi<+\infty, 0<\zeta<+\infty$.

Indicación. Véase también la solución del problema 59 del cap. III.

62. $u(x, y, z, t)=$

$$=\frac{z}{(2a\sqrt{\pi})^3}\int_0^t\frac{d\tau}{(t-\tau)^{5/2}}\int\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+z^2}{4a^2(t-\tau)}}\times$$

$$\times f(\xi, \eta, \tau)\,d\xi\,d\eta. \qquad (1)$$

Si $f(x, y, t)$ no depondo de y, entonces

$$u(x, z, t)=\frac{z}{4\pi a^2}\int_0^t \frac{d\tau}{(t-\tau)^2}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(x-\xi)^2+z^2}{4a^2(t-\tau)}} f(\xi, \tau)\, d\xi. \qquad (2)$$

Indicación. Utilizar la transformación de Fourier propuesta en la indicación al problema anterior.

63. $$u(x, y, z, t)=\frac{1}{(2a\sqrt{\pi t})^3}\int_{-\infty}^{+\infty} d\xi \int_{-\infty}^{+\infty} d\eta \int_0^{+\infty} \times$$
$$\times f(\xi, \eta, \zeta)\left[e^{-\frac{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2}{4a^2t}}+e^{-\frac{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z+\zeta)^2}{4a^2t}}\right] d\zeta.$$

Indicación. Utilizar la transformación de Fourier con respecto al núcleo

$$\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\, e^{i[\nu\xi+\mu\eta]} \cos \nu\zeta$$

en el semiespacio $-\infty<\xi, \eta<+\infty,\ 0<\zeta<+\infty$.

64. $u(x, y, z, t)=$

$$=\frac{1}{(2a\sqrt{\pi})^3}\int_0^t \frac{d\tau}{(t-\tau)^{3/2}}\int_{-\infty}^{+\infty}\int e^{-\frac{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+z^2}{4a^2(t-\tau)}} f(\xi, \eta, \tau)\, d\xi d\eta.$$

Indicación. Utilizar la transformación propuesta en la indicación al problema anterior.

65. $$u(x, y, z, t)=\frac{1}{(2a\sqrt{\pi t})^3}\int_{-\infty}^{+\infty} d\xi \int_{-\infty}^{+\infty} d\eta \int_0^{+\infty} \times$$
$$\times\left[e^{-\frac{(x-\zeta)^2+(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2}{4a^2t}}+e^{-\frac{(x-\zeta)^2+(y-\eta)^2+(z+\zeta)^2}{4a^2t}}-\right.$$
$$\left.-2h\int_0^{+\infty} e^{-h\omega-\frac{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z+\zeta+\omega)^2}{4a^2t}}\, d\omega\right] f(\xi, \eta, \zeta)\, d\zeta.$$

Si f no depende de y, entonces

$$u(x, z, t)=\frac{1}{4\pi a^2 t}\int_{-\infty}^{+\infty}\int f(\xi, \zeta)\left[e^{-\frac{(x-\xi)^2+(z-\zeta)^2}{4a^2t}}+e^{-\frac{(x-\xi)^2+(z+\zeta)^2}{4a^2t}}-\right.$$
$$\left.-2h\int_0^{+\infty} e^{-h\omega-\frac{(x-\xi)^2+(z+\zeta+\omega)^2}{4a^2t}}\, d\omega\right] d\xi d\zeta.$$

Indicación. Utilizar la transformación de Fourier con respecto al núcleo

$$\frac{1}{2^{1/2}\pi^{3/2}}\, e^{i[\lambda\xi+\mu\eta]}\, \frac{\nu\cos\nu\zeta+h \operatorname{sen}\nu\zeta}{\nu^2+h^2}$$

sobre el semiespacio $-\infty<\xi,\ \eta<+\infty,\ 0<\zeta<+\infty$. Si f no depende de y, entonces se debe utilizar la transformación de Fourier con respecto al núcleo

$$\frac{1}{\pi}\,e^{i\lambda\xi}\,\frac{\nu\cos\nu\zeta+h\operatorname{sen}\nu\zeta}{\nu^2+h^2}$$

para $-\infty<\xi<+\infty,\ 0<\zeta<+\infty$.

Véase también la solución del problema 65 del cap. III.

66. $$u(x,y,z,t)=\frac{h}{(2a\sqrt{\pi})^3}\int_0^t\frac{d\tau}{(t-\tau)^{5/2}}\times$$
$$\int_{-\infty}^{+\infty}d\xi\int_{-\infty}^{+\infty}d\eta\int_0^{+\infty}(z+\zeta)\,f(\xi,\eta,\tau)\times e^{-h\zeta-\frac{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z+\zeta)^2}{4a^2(t-\tau)}}\,d\zeta.$$

Si f no depende de y, entonces

$$u(x,z,t)=\frac{h}{4\pi a^2}\int_0^t\frac{d\tau}{(t-\tau)^2}\int_{-\infty}^{+\infty}d\xi\int_0^{+\infty}\times$$
$$\times(z+\zeta)\,f(\xi,\tau)\,e^{-h\zeta-\frac{(x-\xi)^2+(z+\zeta)^2}{4a^2(t-\tau)}}\,d\zeta.$$

Indicación. Utilizar la transformación de Fourier propuesta en el problema anterior.

67. $$u(x,y,z,t)=\frac{1}{(2a\sqrt{\pi})^3}\int_0^t\frac{d\tau}{(t-\tau)^{3/2}}\int_0^{+\infty}d\zeta\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}f(\xi,\eta,\zeta,\tau)\times$$
$$\times\left[e^{-\frac{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2}{4a^2(t-\tau)}}-e^{-\frac{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z+\zeta)^2}{4a^2(t-\tau)}}\right]d\xi\,d\eta.$$

68. $u(x,y,z,t)=$
$$\int_{-\infty}^{+\infty}d\zeta\int_0^{l_2}d\eta\int_0^{l_1}f(\xi,\eta,\zeta)\,G_i(x,y,z,\xi,\eta,\zeta,t)\,d\xi,\qquad i=1,\ 2,\ 3,$$

en el caso a) bajo la integral está G_1; en el caso b), G_2; en el caso c), G_3, donde

$$G_1(x,y,z,\xi,\eta,\zeta,t)=\frac{2}{l_1l_2a\sqrt{\pi t}}\,e^{-\frac{(z-\zeta)^2}{4a^2t}}\sum_{k,\,n=1}^{+\infty}e^{-\pi^2a^2\left(\frac{k^2}{l_1^2}+\frac{n^2}{l_2^2}\right)t}\times$$
$$\times\operatorname{sen}\frac{k\pi x}{l_1}\operatorname{sen}\frac{k\pi\xi}{l_1}\operatorname{sen}\frac{n\pi y}{l_2}\operatorname{sen}\frac{n\pi\eta}{l_2},$$

$G_2(x, y, z, \xi, \eta, \zeta, t)=$

$$=\frac{2}{l_1 l_2 \sqrt{\pi t}} e^{-\frac{(z-\zeta)^2}{4a^2 t}} \sum_{k,\, n=0}^{+\infty} e^{-a^2\pi^2\left(\frac{k^2}{l_1^2}+\frac{n^2}{l_2^2}\right) t} \times$$

$$\times \varepsilon_k \varepsilon_n \cos\frac{k\pi x}{l_1} \cos\frac{k\pi\xi}{l_1} \cos\frac{n\pi y}{l_2} \cos\frac{n\pi\eta}{l_2},$$

$$\varepsilon_k = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{para} \quad k=0, \\ 1 & \text{para} \quad k\neq 0, \end{cases} \qquad \varepsilon_n = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{para} \quad n=0, \\ 1 & \text{para} \quad n\neq 0, \end{cases}$$

$G_3(x, y, z, \xi, \eta, \zeta, t)=$

$$=\frac{2e^{-\frac{(z-\zeta)^2}{4a^2 t}}}{a\sqrt{\pi t}} \sum_{k,\, n=1}^{+\infty} \frac{e^{-a^2(\lambda_k^2+\mu_n^2)t}}{[(\lambda_k^2+h^2)\, l_1+2h)]\, [(\mu_n^2+h^2)\, l_2+2h]} \times$$

$$\times (\lambda_k \cos\lambda_k x + h \operatorname{sen}\lambda_k x)(\lambda_k \cos\lambda_k \xi + h \operatorname{sen}\lambda_k \xi) \times$$

$$\times (\mu_n \cos\mu_n y + h \operatorname{sen}\mu_n y)(\mu_n \cos\mu_n \eta + h \operatorname{sen}\mu_n \eta) =$$

$$=\frac{2e^{-\frac{(z-\zeta)^2}{4a^2 t}}}{a\sqrt{\pi t}} \sum_{k,\, n=1}^{+\infty} \times$$

$$\times \frac{(\lambda_k^2+h^2)(\mu_n^2+h^2)\, e^{-a^2(\lambda_k^2+\mu_n^2)t}}{[(\lambda_k^2+h^2)\, l_1+2h]\, [(\mu_n^2+h^2)\, l_2+2h]} \times$$

$$\times \operatorname{sen}(\lambda_k x+\varphi_k) \operatorname{sen}(\lambda_k \xi+\varphi_k) \operatorname{sen}(\mu_n y+\psi_n) \operatorname{sen}(\mu_n \eta+\psi_n),$$

donde λ_k y μ_n son respectivamente las raíces positivas de las ecuaciones

$$\operatorname{ctg} l_1\lambda = \frac{\lambda^2-h^2}{2\lambda h} \qquad \text{y} \qquad \operatorname{ctg} l_2\mu = \frac{\mu^2-h^2}{2\mu h},$$

$$\varphi_k = \operatorname{arctg}\frac{\lambda_k}{l_1}, \qquad \psi_n = \operatorname{arctg}\frac{\mu_n}{l_2};$$

h, el coeficiente del intercambio de calor.

Indicación. Utilizando la transformación de Fourier con respecto a z

$$\overline{u}(x, y, \nu, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} u(x, y, \zeta, t)\, e^{i\nu\zeta}\, d\zeta, \tag{1}$$

$$\overline{f}(x, y, \nu) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y, \zeta)\, e^{i\nu\zeta}\, d\zeta. \tag{2}$$

llegamos a la ecuación

$$\frac{\partial\overline{u}}{\partial t} = a^2\left\{\frac{\partial^2\overline{u}}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\overline{u}}{\partial y^2}-\lambda^2\overline{u}\right\} \tag{3}$$

y la condición inicial

$$\bar{u}|_{t=0}=f(x, y, \nu). \qquad (4)$$

La sustitución

$$\bar{u}=e^{-a^2\lambda^2 t}\,\bar{v}(x, y, \nu, t)$$

lleva a la ecuación

$$\frac{\partial \bar{v}}{\partial t}=a^2\left\{\frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial y^2}\right\} \qquad (3')$$

y la condición inicial

$$\bar{v}|_{t=0}=f(x, y, \nu). \qquad (4'')$$

Las condiciones de frontera para $\bar{v}$ serán las mismas que para u. Hallamos $\bar{v}$ mediante el método de separación de variables y después, sustituyendo su expresión en (5), utilizamos a $\bar{u}$ la transformación inversa de Fourier, con esto después de realizar la integración respecto a ν se obtiene las expresiones dadas en la respuesta.

69. $$u(x, y, z, t)=\int_0^{+\infty} d\zeta \int_0^{l_2} d\eta \int_0^{l_1} f(\xi, \eta, \zeta)\times$$
$$\times G_i(x, y, z, \xi, \eta, \zeta, t)\, d\xi, \quad i=1, 2.$$

y a las condiciones de frontera a) corresponde la función $\overline{G}_1$ que se obtiene de la función G_1 de la respuesta al problema anterior mediante la sustitución del factor $e^{-\frac{(z-\zeta)^2}{4a^2t}}$ por el factor $\left[e^{-\frac{(z-\zeta)^2}{4a^2t}}-e^{-\frac{(z-\zeta)^2}{4a^2t}}\right]$. Análogamente en el caso b) $\widetilde{G}_2$ se obtiene de G_2 mediante la sustitución

$$e^{-\frac{(z-\zeta)^2}{4a^2t}} \quad \text{por} \quad \left[e^{-\frac{(z-\zeta)^2}{4a^2t}}+e^{-\frac{(z+\zeta)^2}{4a^2t}}\right].$$

Indicación. En el caso a) se debe utilizar la transformación seno de Fourier con respecto a z y en el caso b), la transformación coseno con respecto a z. Después el problema se resuelve análogamente al anterior.

70. $u(r, \varphi, z, t)=$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty} d\zeta \int_0^{r_0} r'\,dr' \int_0^{2\pi} f(r', \varphi', \zeta)\, G_i(r, \varphi, z, r', \varphi', \zeta, t)\, d\varphi', \quad i=1, 2, 3.$$

En el caso a) $i=1$,

$$G_1(r, \varphi, z, r', \varphi', \zeta, t)=\frac{e^{-\frac{(z-\zeta)^2}{4a^2t}}}{ar_0^2\pi\sqrt{\pi t}}\sum_{n, k=0}^{+\infty}\times$$

$$\times\frac{J_n=\left(\frac{\mu_k^{(n)}r}{r_0}\right) J_n\left(\frac{\mu_k^{(n)}r'}{r_0}\right)}{\varepsilon_n\,[J_n'(\mu_k^{(n)})]^2}\cos n(\varphi-\varphi'),$$

$$\varepsilon_n=\begin{cases}2 & \text{para} \quad n=0,\\ 1 & \text{para} \quad n\neq 0,\end{cases}$$

$\mu_k^{(n)}$ son las raíces positivas de la ecuación $J_n(\mu)=0$.

En el caso b) $i=2$,

$$G_2(r, \varphi, z, r', \varphi', \zeta, t)=\frac{e^{-\frac{(z-\zeta)^2}{4a^2t}}}{ar_0^2\pi\sqrt{\pi t}}\sum_{k, n=0}^{+\infty}\times$$

$$\times\frac{J_n\left(\frac{\mu_k^{(n)}r}{r_0}\right)J_n\left(\frac{\mu_k^{(n)}r'}{r_0}\right)}{\varepsilon_n J_n^2(\mu_k^{(n)})\left[1-\frac{n^2}{\mu_k^{(n)2}}\right]}\cos n(\varphi-\varphi'),\quad \varepsilon_n=\begin{cases}2 & \text{para } n=0,\\ 1 & \text{para } n\neq 0.\end{cases}$$

$\mu_k^{(n)}$ son las raíces de la ecuación $J_n'(\mu)=0$, $\mu_k^{(0)}\geqslant\mu_k^{(n)}>0$ para $n\neq 0$.

En el caso c) $i=3$.

$G_3(r, \varphi, z, r', \varphi', \zeta, t)=$

$$=\frac{e^{-\frac{(z-\zeta)^2}{4a^2t}}}{ar_0^2\pi\sqrt{\pi t}}\sum_{k, n=0}^{+\infty}\frac{J_n\left(\frac{\mu_k^{(n)}r}{r_0}\right)J_n\left(\frac{\mu_k^{(n)}r'}{r_0}\right)}{\varepsilon_n J_n^2(\mu_k^{(n)})\left[1+\frac{r_0^2h^2-n^2}{\mu_k^{(n)2}}\right]}\cos n(\varphi-\varphi'),$$

$$\varepsilon_n=\begin{cases}2 & \text{para } n=0,\\ 1 & \text{para } n\neq 0,\end{cases}$$

$\mu_k^{(n)}$ son las raíces positivas de la ecuación $\frac{\mu}{r_0}J_n'(\mu)+hJ_n(\mu)=0$.

Observación. En el caso b) a la raíz $\mu_0^{(0)}=0$ le corresponde una función propia idénticamente igual a una constante.

Indicación. El problema se resuelve análogamente al problema 68.

71. $u(r, \varphi, z, t)=$

$$=\int_0^{+\infty}d\zeta\int_0^{r_0}r'\,dr'\int_0^{2\pi}f(r', \varphi', \zeta)\,\widetilde{G}_i(r, \varphi, z, r', \varphi', \zeta, t)\,d\varphi',\quad i=1, 2;$$

en el caso a) $i=1$, $\widetilde{G}_1$ se obtiene de G_1 del problema anterior mediante la sustitución del factor $e^{-\frac{(z-\zeta)^2}{4a^2t}}$ por el factor $\left[e^{-\frac{(z-\zeta)^2}{4a^2t}}-e^{-\frac{(z+\zeta)^2}{4a^2t}}\right]$; en el caso b) $i=\widetilde{G}_2$ se obtiene de G_2 del problema anterior mediante la sustitución del factor $e^{-\frac{(z-\zeta)^2}{4a^2t}}$ por el factor $\left[e^{-\frac{(z-\zeta)^2}{4a^2t}}+e^{-\frac{(z+\zeta)^2}{4a^2t}}\right]$.

72. $u(r, \varphi, z, t)=$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}d\zeta\int_0^{r_0}r'\,dr'\int_0^{\varphi_0}f(r', \varphi', \zeta)\,G_i(r, \varphi, z, r', \varphi', \zeta, t)\,n\varphi',\quad i=1, 2;$$

en el caso a) $i=1$,

$G_1(r, \varphi, z, r', \varphi', \zeta, t)=$

$$=\frac{e^{-\frac{(z-\zeta)^2}{4a^2t}}}{ar_0^2\varphi_0\sqrt{\pi t}}\sum_{k,\,n=1}^{+\infty} e^{-a^2\mu_k^{(n)2}t}\frac{J_{\frac{n\pi}{\varphi_0}}\left(\frac{\mu_k^{(n)}r}{r_0}\right)J_{\frac{n\pi}{\varphi_0}}\left(\frac{\mu_k^{(n)}r'}{r_0}\right)}{\left[J'_{\frac{n\pi}{\varphi_0}}(\mu_k^{(n)})\right]^2}\times$$

$$\times \operatorname{sen}\frac{n\pi\varphi}{\varphi_0}\operatorname{sen}\frac{n\pi\varphi'}{\varphi_0},$$

$\mu_k^{(n)}$ son las raíces positivas de la ecuación $J_{\frac{n\pi}{\varphi_0}}(\mu)=0$;

en el caso b) $i=2$,

$G_2(r, \varphi, z, r', \varphi', \zeta, t)=$

$$=\frac{e^{-\frac{(z-\zeta)^2}{4a^2t}}}{ar_0^2\varphi_0\sqrt{\pi t}}\sum_{k,\,n=0}^{+\infty} e^{-a^2\mu_k^{(n)2}t}\times$$

$$\times\frac{J_{\frac{n\pi}{\varphi_0}}\left(\frac{\mu_k^{(n)}r}{r^2}\right)J_{\frac{n\pi}{\varphi_0}}\left(\frac{\mu_k^{(n)}r'}{r_0}\right)}{\varepsilon_n\left[1-\frac{n^2\pi^2}{\varphi_0^2\mu_k^{(n)2}}\right]J^2_{\frac{n\pi}{\varphi_0}}(\mu_k^{(n)})}\cos\frac{n\pi\varphi}{\varphi_0}\cos\frac{n\pi\varphi'}{\varphi_0},$$

$$\varepsilon_n=\begin{cases}1 & \text{para} \quad n\neq 0,\\ 2 & \text{para} \quad n=0,\end{cases}$$

$\mu_k^{(n)}>0$ para $n\neq 0$, $\mu_k^{(n)}\geqslant 0$, $\mu_k^{(n)}$ son las raíces de la ecuación

$$J'_{\frac{n\pi}{\varphi_0}}(\mu)=0.$$

A la raíz $\mu_0^{(0)}$ corresponde la función propia idénticamente igual a una constante.

73. $u(r, \varphi, z, t)=$

$$=\int_0^{+\infty}d\zeta\int_0^{r_0}r'\,dr'\int_0^{\varphi_0}f(r', \varphi', \zeta, t)\,\widetilde{G}_i(r, \varphi, z, r'\,\varphi', \zeta, t)\,d\varphi', \quad i=1,\ 2;$$

en el caso a) $i=1$, $\widetilde{G}_1$ se obtiene de G_2 del problema anterior mediante la sustitución del factor

$$e^{-\frac{(z-\zeta)^2}{4a^2t}} \quad \text{por} \quad \left[e^{-\frac{(z-\zeta)^2}{4a^2t}}+e^{-\frac{(z+\zeta)^2}{4a^2t}}\right].$$

en el caso b) $i=2$, $\widetilde{G}_2$ se obtiene de G_2 del problema anterior mediante la sustitución del factor $e^{-\frac{(z-\zeta)^2}{4a^2t}}$ por el factor $\left[e^{-\frac{(z-\zeta)^2}{4a^2t}}+e^{-\frac{(z+\zeta)^2}{4a^2t}}\right]$.

74. $$u(r,\ \varphi,\ t)=\int_0^{+\infty}\rho\,d\rho\int_0^{\varphi_0} f(\rho,\ \varphi')\,G_i(r,\ \varphi,\ \rho,\ \varphi',\ t)\,d\varphi',\quad i=1,\ 2;$$

en el caso a) $i=1$,

$G_1(r,\ \varphi,\ \rho,\ \varphi',\ t)=$

$$=\frac{2}{\varphi_0}\sum_{n=1}^{+\infty}\left\{\int_0^{+\infty}e^{-a^2\lambda^2t}J_{\frac{n\pi}{\varphi_0}}(\lambda\rho)\,J_{\frac{n\pi}{\varphi_0}}(\lambda r)\,\lambda\,d\lambda\right\}\operatorname{sen}\frac{n\pi\varphi'}{\varphi_0}\operatorname{sen}\frac{n\pi\varphi}{\varphi_0};$$

en el caso b) $i=2$,

$G_2(r,\ \varphi,\ \rho,\ \varphi',\ t)=$

$$=\frac{2}{\varphi_0}\sum_{n=0}^{+\infty}\varepsilon_n\left\{\int_0^{+\infty}e^{-a^2\lambda^2t}J_{\frac{\pi n}{\varphi_0}}(\lambda\rho)\,J_{\frac{n\pi}{\varphi_0}}(\lambda r)\,\lambda\,d\lambda\right\}\cos\frac{n\pi\varphi'}{\varphi_0}\cos\frac{n\pi\varphi}{\varphi_0},$$

$$\varepsilon_n=\begin{cases}\frac{1}{2} & \text{para} \quad n\neq 0,\\ 1 & \text{para} \quad n=0.\end{cases}$$

Si se utiliza la conocida relación para las funciones de Bessel

$$\int_0^{+\infty}e^{-\beta^2\tau^2}J_\nu(\alpha\tau)\,J_\nu(\gamma\tau)\,\tau\,d\tau=\frac{1}{2\beta^2}e^{-\frac{\alpha^2+\gamma^2}{4\beta^2}}J_\nu\left(\frac{\alpha\gamma}{2\beta^2}\right),$$

$$\operatorname{Re}(\nu)>-1,\qquad |\operatorname{Arg}\beta|<\frac{\pi}{2},$$

obtenemos:

$$\int_0^{+\infty}e^{-a^2\lambda^2t}J_{\frac{n\pi}{\varphi_0}}(\lambda\rho)\,J_{\frac{n\pi}{\varphi_0}}(\lambda r)\,\lambda\,d\lambda=\frac{1}{2a^2t}e^{-\frac{\rho^2+r^2}{4a^2t}}I_{\frac{n\pi}{\varphi_0}}\left(\frac{\rho r}{2a^2t}\right).$$

Por eso G_1 y G_2 se puede representar en la forma

$$G_1(r,\ \varphi,\ \rho,\ \varphi'\ t)=\frac{e^{-\frac{r^2+\rho^2}{4a^2t}}}{a^2\varphi_0t}\sum_{n=1}^{+\infty}I_{\frac{n\pi}{\varphi_0}}\left(\frac{r\rho}{2a^2t}\right)\operatorname{sen}\frac{n\pi\varphi}{\varphi_0}\operatorname{sen}\frac{n\pi\varphi'}{\varphi_0},$$

$$G_2(r,\ \varphi,\ \rho,\ \varphi',\ t)=\frac{e^{-\frac{r^2+\rho_2}{4a^2t}}}{a^2\varphi_0t}\sum_{n=0}^{+\infty}\varepsilon_nI_{\frac{n\pi}{\varphi_0}}\left(\frac{r\rho}{2a^2t}\right)\cos\frac{n\pi\varphi}{\varphi_0}\operatorname{co}\frac{n\pi\varphi'}{\varphi_0},$$

$$\varepsilon_n=\begin{cases}\frac{1}{2} & \text{para} \quad n=0,\\ 1 & \text{para} \quad n\neq 0.\end{cases}$$

Indicación. Las soluciones particulares de la ecuación

$$\frac{\partial u}{\partial t}=a^2\left\{\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2}\right\}$$

las buscamos en la forma $U(r, \varphi, t)=W(r, t)\Phi(\varphi)$, exigiendo que en los casos a) y b) se cumplan las respectivas condiciones de frontera.

En el caso a) esto conduce a las soluciones particulares $u_n(r, t)\times \times \operatorname{sen}\frac{n\pi\varphi}{\varphi_0}$, $n=1, 2, 3, \ldots$ y en el caso b), a las soluciones particulares $u_n(r, t)\cos\frac{n\pi\varphi}{\varphi_0}$, $n=0, 1, 2, 3, \ldots$. En ambos casos $u_n(r, t)$ es la solución de la ecuación

$$\frac{\partial u_n}{\partial t}=a^2\left\{\frac{\partial^2 u_n}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial u_n}{\partial r}-\frac{\left(\frac{\pi\varphi}{\varphi_0}\right)^2}{r^2}u_n\right\},\quad 0<r,\ t<+\infty. \tag{1}$$

La solución del problema inicial de contorno la buscamos en forma de suma de estas soluciones particulares:

en el caso a)

$$u(r, \varphi, t)=\sum_{n=1}^{+\infty}u_n(r, t)\operatorname{sen}\frac{n\pi\varphi}{\varphi_0}; \tag{2}$$

en el caso b)

$$u(r, \varphi, t)=\sum_{n=0}^{+\infty}u_n(r, t)\cos\frac{n\pi\varphi}{\varphi_0}; \tag{3}$$

Desarrollando $f(r, \varphi)=u|_{t=0}$ en serie con respecto a $\operatorname{sen}\frac{n\pi\varphi}{\varphi_0}$ en el primer caso y con respecto a $\cos\frac{n\pi\varphi}{\varphi_0}$ en el segundo, hallamos las condiciones iniciales para $u_n(r, t)$:

en el caso a)

$$u_n(r, 0)=f_n(r)=\frac{2}{\varphi_0}\int_0^{\varphi_0}f(r, \varphi')\operatorname{sen}\frac{n\pi\varphi'}{\varphi_0}\,d\varphi'; \tag{4}$$

en el caso b)

$$\left.\begin{aligned}u_n(r, 0)&=f_n(r)=\frac{2}{\varphi_0}\int_0^{\varphi_0}f(r, \varphi')\cos\frac{n\pi\varphi'}{\varphi_0}\,d\varphi',\quad n\neq 0,\\ u_0(r, 0)&=f_0(r)=\frac{1}{\varphi_0}\int_0^{\varphi_0}f(r, \varphi')\,d\varphi'.\end{aligned}\right\} \tag{4'}$$

La solución de la ecuación (1) con la condición inicial (4) ó (4') acotada cuando $r\to 0$, la buscamos en la forma

$$u_n(r, t)=\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty}U_n(\rho, t)\,J_{\frac{n\pi}{\varphi_0}}(\lambda\rho)\,J_{\frac{n\pi}{\varphi_0}}(\lambda r)\,\lambda\,d\lambda\,\rho\,d\rho,$$

utilizando la integral de Fourier — Bessel — Hankel *)

$$F(r)=\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty} F(\rho)\,J_\nu(\lambda\rho)\,J_\nu(\lambda r)\,\lambda\,d\lambda\,\rho\,d\rho, \qquad \nu\geqslant-\frac{1}{2}.$$

75. La solución del problema de contorno

$$\frac{\partial u}{\partial t}=a^2\left\{\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2}\right\},$$

$$0<\varphi<\varphi_0, \quad 0\leqslant r<+\infty, \quad 0<t<+\infty, \tag{1}$$

$$u(r,\,0,\,t)=0, \quad \frac{\partial u(r,\,\varphi_0,\,t)}{\partial\varphi}=0, \quad 0<r<+\infty, \quad 0<t<+\infty, \tag{2}$$

$$u(r,\,\varphi,\,0)=f(r,\,\varphi), \quad 0<\varphi<\varphi_0, \quad 0<r<+\infty \tag{3}$$

es:

$$u(r,\,\varphi,\,t)=\int_0^{\varphi_0} d\varphi' \int_0^{+\infty} f(\rho,\,\varphi')\,G(\rho,\,r,\,\varphi',\,\varphi,\,t)\,\rho\,d\rho, \tag{4}$$

donde

$$G(\rho,\,r,\,\varphi',\,\varphi,\,t)=\frac{2}{\varphi_0}\sum_{n=0}^{+\infty}\left\{\int_0^{\infty} e^{-a^2\lambda^2 t}\,J_{\frac{(2n+1)\pi}{2\varphi_0}}(\lambda\rho)\,J_{\frac{(2n+1)\pi}{2\varphi_0}}(\lambda r)\,\lambda\,d\lambda\right\}\times$$
$$\times\operatorname{sen}\frac{(2n+1)\pi\varphi'}{2\varphi_0}\operatorname{sen}\frac{(2n+1)\pi\varphi}{2\varphi_0}.$$

76. $u(r,\,\varphi,\,z,\,t)=$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty} d\zeta\int_0^{r_0} r'\,dr'\int_0^{\varphi_0} f(r',\,\varphi',\,\zeta)\,\widetilde{G}_i(r,\,\varphi,\,z,\,r',\,\varphi',\,\zeta,\,t)\,d\varphi', \quad i=1,\,2;$$

en el caso a) $i=1$,

$$\widetilde{G}_1=\frac{e^{-\frac{(z-\zeta)^2}{4a^2t}}}{2a\sqrt{\pi t}}\cdot G_1,$$

donde G_1 es hallada en el problema 74;
en el caso b) $i=2$,

$$\widetilde{G}_2=\frac{e^{-\frac{(z-\zeta)^2}{4a^2t}}}{2a\sqrt{\pi t}}\cdot G_2,$$

donde G_2 es hallada en el problema 74.

Indicación. Si utilizar la transformación de Fourier con respecto a z, entonces el problema se reduce al problema 74.

---

*) Véase [42], págs. 459-500.

77. La solución del problema de contorno

$$\frac{\partial u}{\partial t}=a^2\left\{\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r}\right\},\quad r_0\leqslant r<+\infty,\quad 0<t<+\infty, \tag{1}$$

$$u(r_0,\ t)=U_0=\text{const},\quad 0<t<+\infty, \tag{2}$$

$$u(r,\ 0)=0,\quad r_0<r<+\infty \tag{3}$$

es:

$$u(r,\ t)=\frac{2U_0}{\pi}\int_{r_0}^{+\infty}\frac{[1-e^{-a^2\lambda^2 t}]\,K(r,\ \lambda)}{J_0^2(r_0\lambda)+N_0^2(r_0\lambda)}\,\frac{d\lambda}{\lambda}, \tag{4}$$

donde

$$K(r,\ \lambda)=J_0(r_0\lambda)\,N_0(r\lambda)-N_0(r_0\lambda)\,J_0(r\lambda). \tag{5}$$

Indicación. Utilizar la transformación integral de Weber con respecto al núcleo $rK(r,\ \lambda)$ sobre el intervalo $r_0\leqslant r<+\infty$, utilizando precisamente primero esta transformación en la ecuación (1), obtener la ecuación para la imagen de Weber de la función incógnita

$$\bar{u}(\lambda,\ t)=\int_{r_0}^{+\infty}u(r,\ t)\,rK(r,\ \lambda)\,dr, \tag{6}$$

luego, una vez hallado $\bar{u}(\lambda,\ t)$, utilizar la fórmula de inversión de Weber

$$u(r,\ t)=\int_{r_0}^{+\infty}\frac{\bar{u}(\lambda,\ t)\,\lambda K(r,\ \lambda)\,d\lambda}{J_0^2(r_0\lambda)+N_0^2(r_0\lambda)}, \tag{7}$$

2. Construcción y utilización de las funciones de influencia de los manantiales puntiformes instantáneos de calor

78. *Indicación.* La validez de la afirmación se verifica mediante la sustitución directa de la función $u(x,\ y,\ z,\ t)=u_1(x,\ t)\,u_2(y,\ t)\,u_3(z,\ t)$ en la ecuación (1) y en la condición inicial (2).

79. $$G(x,\ y,\ z)=\frac{1}{(2a\sqrt{\pi t})^3}\,e^{-\frac{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2}{4a^2t}}.$$

Indicación. Si en el problema 78 se hace $f_1(x)=\delta(x)$, $f_2(y)=\delta(y)$, $f_3(z)=\delta(z)$, entonces directamente se obtiene que la función de influencia del manantial puntiforme instantáneo de calor para el espacio $-\infty<x,\ y,\ z<+\infty$ es el producto de las funciones de influencia de los manantiales puntiformes instantáneos de calor para las rectas $-\infty<x<+\infty$, $-\infty<y<+\infty$, $-\infty<z<+\infty$.

80. $u(x, y, z, t) =$

$$= \frac{1}{(2a\sqrt{\pi t})^3} \iiint\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2}{4a^2t}} f(\xi, \eta, \zeta)\, d\xi\, d\eta\, d\zeta +$$

$$+ \frac{1}{(2a\sqrt{\pi t})^3} \int\limits_0^t \frac{d\tau}{(t-\tau)^{3/2}} \iiint\limits_{-\infty}^{+\infty} \times$$

$$\times e^{-\frac{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2}{4a^2(t-\tau)}} F(\xi, \eta, \zeta, \tau)\, d\xi\, d\eta\, d\zeta. \qquad (1)$$

Indicación. La fórmula (1) se puede obtener de una forma completamente elemental, pero no estricta, utilizando el sentido físico de la función de influencia obtenida en la solución del problema 79 y considerando la temperatura buscada $u(x, y, z, t)$ como la suma de las acciones de los manantiales elementales instantáneos, distribuidos en el momento inicial de tiempo con la densidad $f(x, y, z)$, y los manantiales de actuación continua, distribuidos con densidad $F(x, y, z, t)$.

La fórmula (1) puede ser obtenida también mediante la fórmula de Green análogamente a como se hizo en la solución del problema 68 del cap. III.

81. a) $G_1(x, y, z, \xi, \eta, \zeta, t) =$

$$= \frac{1}{(2a\sqrt{\pi t})^3} \left[e^{-\frac{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2}{4a^2t}} - e^{-\frac{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z+\zeta)^2}{-4a^2t}} \right],$$

b) $G_2(x, y, z, \xi, \eta, \zeta, t) =$

$$= \frac{1}{(2a\sqrt{\pi t})^3} \left[e^{-\frac{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2}{4a^2t}} + e^{-\frac{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z+\zeta)^2}{4a^2t}} \right],$$

c) $G_3(x, y, z, \xi, \eta, \zeta, t) =$

$$= \frac{1}{(2a\sqrt{\pi t})^3} \left[e^{-\frac{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2}{4a^2t}} + e^{-\frac{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z+\zeta)^2}{4a^2t}} - \right.$$

$$\left. - 2h \int\limits_0^{+\infty} e^{-h\omega} e^{-\frac{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z+\zeta+\omega)^2}{4a^2t}} d\omega \right].$$

82. a) $u(x, y, z, t) =$

$$= \int\limits_{-\infty}^{+\infty} d\xi \int\limits_{-\infty}^{+\infty} d\eta \int\limits_0^{+\infty} f(\xi, \eta, \zeta)\, G_1(x, y, z, \xi, \eta, \zeta, t)\, d\zeta +$$

$$+ a^2 \int\limits_0^t d\tau \iint\limits_{-\infty}^{+\infty} \Phi(\xi, \eta, \tau)\, G_1(x, y, z, \xi, \eta, 0, t-\tau)\, d\xi\, d\eta +$$

$$+ \int\limits_0^t d\tau \int\limits_0^{+\infty} d\zeta \iint\limits_{-\infty}^{+\infty} F(\xi, \eta, \zeta, \tau)\, G_1(x, y, z, \xi, \eta, \zeta, t-\tau)\, d\xi\, d\eta,$$

b) $u(x, y, z, t)=$

$$\int_0^{+\infty} d\zeta \int\int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi, \eta, \zeta)\, G_2(x, y, z, \xi, \eta, \zeta, t)\, d\xi\, d\eta -$$

$$-a^2 \int_0^t d\tau \int\int_{-\infty}^{+\infty} \Phi(\xi, \eta, \tau)\, G_2(x, y, z, \xi, \eta, 0, t-\tau)\, d\xi\, d\eta +$$

$$+\int_0^t d\tau \int_0^{+\infty} d\zeta \int\int_{-\infty}^{+\infty} F(\xi, \eta, \zeta, \tau)\, G_2(x, y, z, \xi, \eta, \zeta, t-\tau)\, d\xi\, d\eta,$$

c) $u(x, y, z, t)=$

$$=\int_0^{+\infty} d\zeta \int\int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi, \eta, \zeta)\, G_3(x, y, z, \xi, \eta, \zeta, t)\, d\xi\, d\eta +$$

$$+ha^2 \int_0^t d\tau \int\int_{-\infty}^{+\infty} \Phi(\xi, \eta, \tau)\, G_3(x, y, z, \xi, \eta, 0, t-\tau)\, d\xi\, d\eta +$$

$$+\int_0^t d\tau \int_0^{+\infty} d\zeta \int\int_{-\infty}^{+\infty} F(\xi, \eta, \zeta, \tau)\, G_3(x, y, z, \xi, \eta, \zeta, t-\tau)\, d\xi\, d\eta$$

83. *Indicación*. Utilizar el método propuesto en la indicación al problema 79.

84. a) $G(x, y, z, \xi, \eta, \zeta, t)=$

$$=\frac{e^{-\frac{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2}{4a^2t}}}{(2a\sqrt{\pi t})^3} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left(e^{-\frac{(z-\zeta+2nl)^2}{4a^2t}} - e^{-\frac{(z+\zeta+2nl)^2}{4a^2t}}\right) =$$

$$=\frac{e^{-\frac{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2}{4a^2t}}}{(2a\sqrt{\pi t})^2} \cdot \frac{2}{l} \sum_{n=1}^{+\infty} e^{-\frac{n^2\pi^2a^2}{l^2}t} \operatorname{sen}\frac{n\pi z}{l} \operatorname{sen}\frac{n\pi\zeta}{l},$$

b) $G(x, y, z, \xi, \eta, \zeta, t)=$

$$=\frac{e^{-\frac{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2}{4a^2t}}}{(2a\sqrt{\pi t})^3} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left(e^{-\frac{(z-\zeta+2nl)^2}{4a^2t}} + e^{-\frac{(z+\zeta+2nl)^2}{4a^2t}}\right) =$$

$$=\frac{e^{-\frac{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2}{4a^2t}}}{(2a\sqrt{\pi t})^2} \frac{2}{l} \left\{\frac{1}{2} + \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-\frac{n^2\pi^2a^2}{l^2}t} \cos\frac{n\pi z}{l} \cos\frac{n\pi\zeta}{l}\right\},$$

c) $G(x, y, z, \xi, \eta, \zeta, t) =$

$$= \frac{e^{-\frac{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2}{4a^2t}}}{(2a\sqrt{\pi t})^3} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (-1)^n \left(e^{-\frac{(z-\zeta+2nl)^2}{4a^2t}} - e^{-\frac{(z+\zeta-2nl)^2}{4a^2t}}\right) =$$

$$= \frac{e^{-\frac{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2}{4a^2t}}}{(2a\sqrt{\pi t})^2} \frac{2}{l} \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-\frac{(2n+1)^2\pi^2a^2}{4l^2}t} \cos\frac{(2n+1)\pi z}{2l} \cos\frac{(2n+1)\pi\zeta}{2l}.$$

d) $G(x, y, z, \xi, \eta, \zeta, t) =$

$$= \frac{e^{-\frac{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2}{4a^2t}}}{(2a\sqrt{\pi t})^2} 2 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^{-a^2\lambda_n^2 t}}{(\lambda_n^2+h^2)\,l+2h} \times$$

$$\times (\lambda_n \cos\lambda_n x + h \operatorname{sen} \lambda_n x)(\lambda_n \cos\lambda_n \xi + h \operatorname{sen} \lambda_n \xi),$$

λ_n son las raíces positivas de la ecuación $\operatorname{ctg} l\lambda = \frac{\lambda^2-h^2}{2\lambda h}$.

85. a) $G_1(x, y, z, x', y', z', t) =$

$$= \frac{e^{-\frac{(z-z')^2}{4a^2t}}}{(2a\sqrt{\pi t})^3} \sum_{n,\,k=-\infty}^{+\infty} \left(e^{-\frac{(x-x'+2nl_1)^2}{4a^2t}} - e^{-\frac{(x+x'+2nl_1)^2}{4a^2t}}\right) \times$$

$$\times \left(e^{-\frac{(y-y'+2kl_2)^2}{4a^2t}} - e^{-\frac{(y+y'+2kl_2)^2}{4a^2t}}\right),$$

b) $G_2(x, y, z, x', y', z', t) =$

$$= \frac{e^{-\frac{(z-z')^2}{4a^2t}}}{(2a\sqrt{\pi t})^3} \sum_{n,\,k=-\infty}^{+\infty} \left(e^{-\frac{(x-x'+2nl_1)^2}{4a^2t}} + e^{-\frac{(x+x'+2nl_1)^2}{4a^2t}}\right) \times$$

$$\times \left(e^{-\frac{(y-y'+2kl_2)^2}{4a^2t}} + e^{-\frac{(y+y'+2kl_2)^2}{4a^2t}}\right)$$

Indicación. Utilizar la afirmación formulada en el problema 79.

86. a) $$G_1 = \frac{1}{(2a\sqrt{\pi t})^3} \sum_{k,\,m,\,n=-\infty}^{+\infty} \left(e^{-\frac{(x-x'+2kl_1)^2}{4a^2t}} - e^{-\frac{(x+x'+2kl_1)^2}{4a^2t}}\right) \times$$

$$\times \left(e^{-\frac{(y-y'+2ml_2)^2}{4a^2t}} - e^{-\frac{(y+y'+2ml_2)^2}{4a^2t}}\right) \times$$

$$\times \left(e^{-\frac{(z-z'+2nl_3)^2}{4a^2t}} - e^{-\frac{(z+z'+2nl_3)^2}{4a^2t}}\right),$$

b) G_2 **se obtiene de** G_1**, si en todas partes entre las paréntesis delante de** e **se coloca el signo más.**

Indicación. Véase la indicación al problema anterior.

87. a) $G(r, \varphi, z, r', \varphi', z', t) =$

$$=\frac{e^{-\frac{(z-z')^2+r^2+r'^2}{4a^2t}}}{(2a\sqrt{\pi t})^3}\sum_{h=0}^{m-1}\left(e^{\frac{2rr'\cos\left(\varphi-\varphi'-2h\frac{\pi}{m}\right)}{4a^2t}}-e^{\frac{2rr'\cos\left(\varphi+\varphi'+2h\frac{\pi}{m}\right)}{4a^2t}}\right).$$

b) $G(r, \varphi, z, r', \varphi', z', t) =$

$$=\frac{e^{-\frac{(z-z')^2+r^2+r'^2}{4a^2t}}}{(2a\sqrt{\pi t})^3}\sum_{k=0}^{m-1}\left(e^{\frac{2rr'\cos\left(\varphi-\varphi'-2h\frac{\pi}{m}\right)}{4a^2t}}+e^{\frac{2rr'\cos\left(\varphi+\varphi'+2h\frac{\pi}{m}\right)}{4a^2t}}\right).$$

Indicación. Sea que el manantial instantáneo está en el punto P_0 con coordenadas (r', φ', z') (fig. 48). Construimos consecutivamente: la reflexión simétrica P_1 del punto P_0 con respecto al plano I, después la reflexión simétrica P_2 del punto P_1 con respecto al plano II, luego la reflexión simétrica P_3 del punto

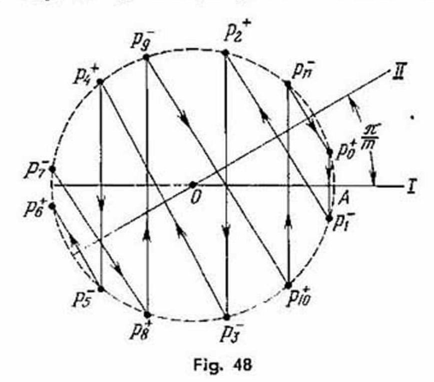


Fig. 48

P_2 con respecto al plano I, etc., colocando en el caso a) en los puntos con los números pares los manantiales instantáneos de potencia unitaria positiva y en los puntos con los números impares, los de potencia negativa; en el caso b) en todos estos puntos se colocan los manantiales instantáneos de potencia unitaria positiva. Tenemos:

$$\angle AOP_1^- = -\varphi', \quad \angle AOP_2^+ = \varphi' + 2\frac{\pi}{m}, \quad \angle AOP_3^- = -\left(\varphi' + 2\frac{\pi}{m}\right),$$

$$\angle AOP_4^+ = \varphi' + 4\frac{\pi}{m}, \quad \angle AOP_5^- = -\left(\varphi' + 4\frac{\pi}{m}\right),$$

$$\angle AOP_6^+ = \varphi' + 6\frac{\pi}{m}, \ \ldots,$$

$$\angle AOP_{2m-1}^- = -\left[\varphi' + 2(m-1)\frac{\pi}{m}\right].$$

Los puntos P_{2m-1} y P_0 son simétricos con respecto al plano II; en efecto, $\angle AOP_{2m-1} - 2\left(\frac{\pi}{m} - \varphi'\right) = \varphi' - 2\pi$. Es fácil observar que con el arreglo indicado de los manantiales, en los casos a) y b) las condiciones de frontera sobre los planos I y II serán cumplidas.

Observación. El método de reflexiones ya es inaplicable para una cuña con el ángulo de abertura $\frac{n\pi}{m}$, donde n y m son números naturales primos*). En el caso de una cuña con un ángulo de abertura arbitrario φ_0 las expresiones de las funciones de influencia para las condiciones de frontera a) y b) fueron obtenidas en la solución del problema 76 de este parágrafo (véase también el problema 74). Si $\varphi_0 = \frac{\pi}{m}$, donde m es un número natural, entonces la expresión (obtenida mediante el método de reflexión) de la función de influencia puede ser transformada en la expresión en la solución del problema**).

88. Colocando el origen del sistema esférico de coordenadas en el centro de la esfera, obtenemos

$$u = \frac{Q}{c\rho} G(r, r', t), \tag{1}$$

donde

$$g(r, r', t) = \frac{1}{8\pi a r r' \sqrt{\pi t}}\left[e^{-\frac{(r-r')^2}{4a^2 t}} - e^{-\frac{(r+r')^2}{4a^2 t}}\right] \tag{2}$$

se denomina función de influencia del manantial esférico de calor.

Indicación. Resolvemos la ecuación

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2\left\{\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial u}{\partial r}\right\}, \quad 0 < r < +\infty, \quad 0 < t < +\infty, \tag{3}$$

con las condiciones iniciales

$$u(r, 0) = \begin{cases} 0 & \text{para} \quad 0 < r < r', \\ \dfrac{Q}{c\rho 4\pi r'^2\, dr'} & \text{para} \quad r' < r < r' + dr', \\ 0 & \text{para} \quad r' + dr' < r < +\infty, \end{cases} \tag{4}$$

después, en la solución obtenida pasamos al límite cuando $dr' \to 0$. La solución de la ecuación (3) con la condición inicial (4) mediante la sustitución $v(r, t) = ru(r, t)$ se reduce al caso unidimensional y $v(0, t) = 0$, dado que $u(0, t)$ es una magnitud acotada.

89. $$u(r, t) = \frac{1}{2ar\sqrt{\pi t}}\int_0^{+\infty} \xi^2 F(\xi)\left[e^{-\frac{(r-\xi)^2}{4a^2 t}} - e^{-\frac{(r+\xi)^2}{4a^2 t}}\right] d\xi + \frac{1}{2a\sqrt{\pi}}\int_0^t \frac{d\tau}{\sqrt{t-\tau}}\int_0^{+\infty} \xi^2 f(\xi, \tau)\left[e^{-\frac{(r-\xi)^2}{4a^2(t-\tau)}} - e^{-\frac{(r+\xi)^2}{4a^2(t-\tau)}}\right] d.$$

*) Para más detalles véase [41], pág. 185.
**) Véase [41], pág. 184.

90.

$$u=\frac{Q}{c\rho}\cdot G(r,\ r',\ t), \tag{1}$$

donde

$$G(r,\ r',\ t)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{+\infty} e^{-a^2\lambda^2 t} J_0(\lambda r)\, J_0(\lambda r')\times$$

$$\times\lambda\, d\lambda=\frac{1}{4\pi a^2 t}\, e^{-\frac{r^2+r'^2}{4a^2 t}} I_0\left(\frac{rr'}{2a^2 t}\right) \tag{2}$$

se llama la función de influencia del manantial cilíndrico de calor.

Indicación. Resolvemos la ecuación

$$\frac{\partial u}{\partial t}=a^2\left\{\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r}\right\},\quad 0<r<+\infty,\quad 0<t<+\infty, \tag{3}$$

con la condición inicial

$$u(r,\ 0)=\begin{cases} 0 & \text{para}\quad 0<r<r', \\ \dfrac{Q}{2\pi r'\, dr'\, c\rho} & \text{para}\quad r'<r<r'+dr', \\ 0 & \text{para}\quad r'+dr'<r<+\infty \end{cases} \tag{4}$$

y después, en la solución obtenida pasamos al límite cuando $dr'\to 0$. Para $r=0$ $u(r,\ t)$ debe ser acotada. La solución de la ecuación (3) que satisface la condición inicial (4) y que sea acotada para $r=0$, la buscamos en la forma

$$u(r,\ t)=\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty} U(\rho,\ t)\, J_0(\lambda\rho)\, J_0(\lambda r)\,\lambda\, d\lambda\,\rho\, d\rho. \tag{5}$$

Véase también la indicación al problema 74.

91. $$u(r,\ t)=\frac{1}{2a^2 t}\, e^{-\frac{r^2}{4a^2 t}}\int_0^{+\infty}\xi F(\xi)\, e^{-\frac{\xi^2}{4a^2 t}} I_0\left(\frac{r\xi}{2a^2 t}\right) d\xi+$$

$$+\int_0^t \frac{e^{-\frac{r^2}{4a^2(t-\tau)}}}{2a^2(t-\tau)}\, d\tau\int_0^{+\infty}\xi f(\xi,\ \tau)\, e^{-\frac{\xi^2}{4a^2(t-\tau)}} I_0\left(\frac{r\xi}{2a^2(t-\tau)}\right) d\xi.$$

92. La función de influencia para la ecuación

$$\frac{\partial u}{\partial t}=D\,\Delta u-v\,\mathrm{grad}\, u$$

es

$$G(x,\ y,\ z,\ x',\ y',\ z',\ t)=\frac{1}{(2\sqrt{Dt})^3}\times$$

$$\times e^{-\frac{(x-v_1 t-x')^2+(y-v_2 t-y')^2+(z-v_3 t-z')^2}{4Dt}}, \tag{1}$$

donde v_1, v_2, v_3 son las componentes del vector v en el sentido de los ejes x, y, z y x', y', z', las coordenadas del punto en que estaba el manantial en el momento $t=0$.

Indicación. En el sistema de coordenadas que se mueve junto con el medio la ecuación de la difusión toma la forma $\frac{\partial u}{\partial t}=D\Delta u$. Escribiendo la expresión de la función de influencia en el sistema móvil de coordenadas y regresando al sistema inmóvil, obtenemos (1).

93. Para el manantial con las coordenadas $(0, y', z')$ tenemos

$$G(x, y, z, y', z')=\frac{v}{4D\pi x}e^{-\frac{(y-y')^2+(z-z')^2}{4\frac{D}{v}x}}.$$

94. a) $G(x, y, z, y', z')=\frac{v}{4D\pi x}\times$

$$\times\left[e^{-\frac{(y-y')^2+(z-z')^2}{4\frac{D}{v}x}}+e^{-\frac{(y-y')^2+(z+z')^2}{4\frac{D}{v}x}}\right],$$

b) $G(x, y, z, y', z')=\frac{v}{4D\pi x}\left[e^{-\frac{(y-y')^2+(z-z')^2}{4\frac{D}{v}x}}-e^{-\frac{(y-y')^2+(z+z')^2}{4\frac{D}{v}x}}\right],$

c) $G(x, y, z, y', z')=\frac{v}{4D\pi x}\times$

$$\times\left[e^{-\frac{(y-y')^2+(z-z')^2}{4\frac{D}{v}x}}+e^{-\frac{(y-y')^2+(z+z')^2}{4\frac{D}{v}x}}-\right.$$

$$\left.-2h\int_0^{+\infty}e^{-h\omega-\frac{(z+z'+\omega)^2}{4\frac{D}{v}x}}d\omega\right].$$

95. $u(x, y, z, t)=\frac{1}{(2\sqrt{\pi D})^3}\int_0^t\frac{f(\tau)}{(t-\tau)^{3/2}}\times$

$$\times e^{-\frac{[x-\varphi(\tau)]^2+[y-\psi(\tau)]^2+[z-\varkappa(\tau)]^2}{4D(t-\tau)}}d\tau.$$

Indicación. Buscamos la solución de la ecuación

$$\frac{\partial u}{\partial t}=a^2\left\{\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right\}+$$

$$+f(t)\,\delta(x-\varphi(t))\,\delta(y-\psi(t))\,\delta(z-\varkappa(t)), \qquad (1)$$

con la condición inicial

$$u|_{t=0}=0, \qquad (2)$$

δ es el símbolo de la función delta impulsiva.

96. $u(r, t)=\frac{U_0}{2}\left[\Phi\left(\frac{r+r_0}{2\sqrt{Dt}}\right)-\Phi\left(\frac{r-r_0}{2\sqrt{Dt}}\right)\right]+$

$$+\frac{U_0}{r}\sqrt{\frac{Dt}{\pi}}\left(e^{-\frac{(r-r_0)^2}{4a^2t}}-e^{-\frac{(r+r_0)^2}{4a^2t}}\right), \qquad (1)$$

donde

$$\Phi(z)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^z e^{-\zeta^2}\,d\zeta. \qquad (2)$$

Indicación. Si se utiliza la función de influencia del manantial esférico instantáneo hallada en la solución del problema 88, teniendo en cuenta la semejanza de los problemas térmico y de difusión, entonces la solución de la ecuación

$$\frac{\partial u}{\partial t}=D\left\{\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+\frac{2}{r}\frac{\partial u}{\partial r}\right\}, \quad 0<r,\ t<+\infty, \qquad (3)$$

que satisface la condición inicial

$$u(r,\ 0)=f(r), \quad 0<r<+\infty, \qquad (4)$$

puede ser representada en la forma

$$u(r,\ t)=\int_0^{+\infty} f(r')\,G(r,\ r',\ t)\,4\pi r'^2\,dr', \qquad (5)$$

donde

$$G(r,\ r',\ t)=\frac{1}{8\pi rr'\sqrt{\pi Dt}}\left[e^{-\frac{(r-r')^2}{4Dt}}-e^{-\frac{(r+r')^2}{4Dt}}\right]. \qquad (6)$$

El problema se puede resolver también reduciéndolo a una barra semiacotada mediante la sustitución $v(r,\ t)=ru,\ (r,\ t)$.

97. a) $u(x,\ y,\ z,\ t)=\tilde{u}\left(\sqrt{x^2+y^2+(z-z_0)^2},\ t\right)+\tilde{u}\left(\sqrt{x^2+y^2+(z+z_0)^2},\ t\right)$,

b) $u(x,\ y,\ z,\ t)=\tilde{u}\left(\sqrt{x^2+y^2+(z-z_0)^2},\ t\right)-\tilde{u}\left(\sqrt{x^2+y^2+(z+z_0)^2},\ t\right)$,

donde $\tilde{u}(r,\ t)$ es la solución del problema anterior.

98. $$u(r,\ t)=\frac{U_0}{2Dt}\int_0^{r_0} e^{-\frac{r^2+r'^2}{4Dt}}\,I_0\left(\frac{rr'}{2Dt}\right)r'\,dr'. \qquad (1)$$

Indicación. Si utilizar la función de influencia del manantial cilíndrico instantáneo obtenida en la solución del problema 90, teniendo en cuenta la semejanza de los problemas térmico y de difusión, entonces la solución de la ecuación

$$\frac{\partial u}{\partial t}=D\left\{\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r}\right\}, \quad 0\leqslant r<+\infty, \quad 0<t<+\infty, \qquad (2)$$

que satisface la condición inicial

$$u(r,\ 0)=f(r), \quad 0<r<+\infty, \qquad (3)$$

se puede representar en la fo ma

$$u(r,\ t)=\int_0^{+\infty} f(r')\,G(r,\ r',\ t)\,2\pi r'\,dr', \qquad (4)$$

donde

$$G(r, r', t) = \frac{1}{4\pi Dt} e^{-\frac{r^2+r'^2}{4Dt}} I_0\left(\frac{rr'}{2Dt}\right). \qquad (5)$$

99. a) $u(x, y, t) = \tilde{u}\left(\sqrt{(x-x_0)^2+y^2}, t\right) + \tilde{u}\left(\sqrt{(x+x_0)^2+y^2}, t\right)$,

b) $u(x, y, t) = \tilde{u}\left(\sqrt{(x-x_0)^2+y^2}, t\right) - \tilde{u}\left(\sqrt{(x+x_0)^2+y^2}, t\right)$,

donde $\tilde{u}(r, t)$ es la solución del problema anterior.

100. La solución del problema de contorno (fig. 49)

$$\frac{\partial H}{\partial t} = a^2\left\{\frac{\partial^2 H}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 H}{\partial y^2}\right\}, \quad a^2 = \frac{kh}{m}; \text{*)} \quad -\infty < x < +\infty, \quad 0 < y,\ t < +\infty, \qquad (1)$$

$$H(x, y, 0) = H_0 = \text{const}, \quad -\infty < x < +\infty, \quad 0 < y < +\infty, \qquad (2)$$

$$H(x, 0, t) = \begin{cases} H_1, & -\infty < x < 0, \\ H_2, & 0 < x < +\infty, \end{cases} \quad 0 < t < +\infty, \qquad (3)$$

es:

$$H(x, y, t) = H_0\Phi\left(\frac{y}{2a\sqrt{t}}\right) + \frac{H_1+H_2}{2}\left[1 - \Phi\left(\frac{y}{2a\sqrt{t}}\right)\right] - \frac{(H_1-H_2)\,y}{\pi}\int_0^x e^{-\frac{\eta^2+y^2}{4a^2t}} \frac{d\eta}{\eta^2+y^2}.$$

Indicación. Construir la función de influencia del manantial puntiforme instantáneo para el semiplano $y \geqslant 0$ con la condición homogénea de frontera de primer género para la ecuación (1) y después representar la solución del problema (1), (2), (3) mediante esta función del manantial.

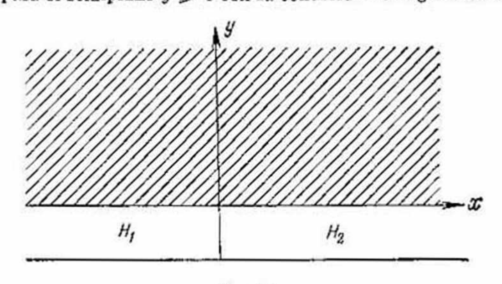


Fig. 49

101. Para el flujo buscado $q(t)$ obtenemos la expresión

$$-\lambda u_r(r_0, t) = q(t) = \frac{\lambda}{\pi}\frac{d}{dt}\int_0^t \left\{\frac{\sqrt{\pi}}{a}\varphi(\tau) + \frac{1}{r_0}\int_0^t \frac{\varphi(\xi)\,d\xi}{\sqrt{t-\xi}}\right\}\frac{d\tau}{\sqrt{t-\tau}}.$$

*) Véase la solución del problema 8.

Indicación. Mediante la sustitución $v(r, t) = ru(r, t)$, donde $u(r, t)$ es la temperatura del espacio, pasamos al problema:

$$\frac{\partial v}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 v}{\partial r^2}, \quad r_0 \leqslant r < +\infty, \quad 0 < t < +\infty,$$

$$v(r, 0) = 0, \qquad r_0 < r < +\infty,$$

$$v(r_0, t) = r_0 \varphi(t), \quad 0 < t < +\infty,$$

$$\left.\frac{\partial v}{\partial r}\right|_{r=r_0} = -\frac{r_0}{\lambda} q(t) + \varphi(t), \quad 0 < t < +\infty,$$

donde $q(t)$ es la función buscada. Después, como en los problemas 95 y 96 § 2 cap. III, resolviendo la ecuación integral de Abel, hallamos $q(t)$.

Capítulo VI

ECUACIONES DE TIPO HIPERBÓLICO

§ 1. Problemas físicos que conducen a las ecuaciones de tipo hiperbólico; planteamiento de los problemas de contorno

1. Por coordenadas de Lagrange*) de una partícula tomamos sus coordenadas cartesianas x, y, z, en el estado no perturbado. Sean las coordenadas cartesianas de la partícula, en el estado perturbado, iguales a

$$\xi = x + u^{(1)}(x, y, z, t),$$
$$\eta = y + u^{(2)}(x, y, z, t),$$
$$\zeta = z + u^{(3)}(x, y, z, t).$$

El vector $u = iu^{(1)} + ju^{(2)} + ku^{(3)}$ caracteriza el desplazamiento de la partícula del estado no perturbado x, y, z. El vector de la velocidad de la partícula es

$$v = \frac{du}{dt} = i\dot{u}^{(1)} + j\dot{u}^{(2)} + k\dot{u}^{(3)} = iv^{(1)} + jv^{(2)} + kv^{(3)},$$

donde el punto colocado encima representa la derivada con respecto al tiempo. El potencial de las velocidades y el del desplazamiento se determinan por las igualdades

$$\operatorname{grad} U = v, \quad \operatorname{grad} \Phi = u,$$

cada uno con exactitud hasta un sumando que es una función arbitraria del tiempo. La perturbación de la densidad $\tilde{\rho}$ y la perturbación de la presión $\tilde{p}$ se determinan como antes**). Cada una de las magnitudes

$$\tilde{\rho}, \ \tilde{p}, \ \rho, \ p, \ U, \ \Phi, \ u^{(i)}, \ v^{(i)}; \quad i = 1, 2, 3,$$

en el supuesto de que las perturbaciones sean pequeñas, satisface la ecuación

$$u_{tt} = a^2 (u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}), \tag{1}$$

donde $a^2 = k\frac{p_0}{\rho_0}$; $k = \frac{c_p}{c_v}$ es la razón del calor específico con respecto a la presión constante al calor específico a volumen constante; $p_0 = \text{const}$ y $\rho_0 = \text{const}$ son, respectivamente, la presión y la densidad no perturbadas. Las condiciones iniciales se escriben en la forma

$$u(x, y, z, 0) = f(x, y, z), \quad u_t(x, y, z, 0) = F(x, y, z),$$
$$-\infty < x, y, z < +\infty.$$

Cada una de las magnitudes $\tilde{\rho}$, $\tilde{p}$, U, Φ, v, u puede ser expresada por cualquier otra de estas magnitudes mediante las relaciones

$$\tilde{p} = a^2\tilde{\rho}, \tag{3}$$

$$\rho_0 U_t + \tilde{p} = 0, \tag{4}$$

*) Para más detalles sobre las coordenadas de Lagrange véase el problema 4, § 1, cap. II.
**) Véase el problema 4, § 1, cap. II.

$$\rho_0\Phi_{tt}+\tilde{p}=0, \tag{5}$$

$$v=\text{grad } U, \tag{6}$$

$$u=\text{grad } \Phi, \tag{7}$$

$$v=\frac{du}{dt}. \tag{8}$$

Indicación. La ecuación de continuidad en las coordenadas de Lagrange se puede obtener examinando la deformación del volumen elemental $\Delta x \Delta y \Delta z$ y teniendo en cuenta que su masa queda invariable; el coeficiente de la deformación del volumen es el determinante de Ostrogradski («el jacobiano»). La ecuación al ser lineal se vuelve adiabática y las ecuaciones (4) y (5) se deducen del mismo modo que las correspondientes ecuaciones en la solución del problema 4 § 1 cap. II.

2. Sobre el plano que acota el semiespacio en examen deben cumplirse las condiciones de frontera

a) $\frac{\partial\rho}{\partial n}=\frac{\partial p}{\partial n}=\frac{\partial U}{\partial n}=\frac{\partial\Phi}{\partial n}=0$, donde $\frac{\partial}{\partial n}$ es la derivada según la dirección de la normal al plano;

b) $\frac{\partial U}{\partial n}=V$, $\frac{\partial\Phi}{\partial n}=\int\limits_0^t V\,dt$, $\frac{\partial\tilde{p}}{\partial n}=-\rho_0\dot{V}$, $\frac{\partial\rho}{\partial n}=-\frac{\rho_0}{a^2}\dot{V}$, donde $V(t)$ es la proyección de la velocidad del plano sobre la dirección elegida de la normal a que corresponde la derivada $\frac{\partial}{\partial n}$.

3. Las magnitudes de una parte de la superficie Σ están marcadas con el índice 1, de la otra parte, con el índice 2. Sobre la superficie Σ deben cumplirse las condiciones de frontera

$$\rho_{01}U_1=\rho_{02}U_2, \tag{1}$$

$$\frac{\partial U_1}{\partial n}=\frac{\partial U_2}{\partial n}, \tag{2}$$

donde $\frac{\partial}{\partial n}$ significa la derivada con respecto a la dirección de la normal a la superficie Σ; ρ_{01} y ρ_{02} son las densidades no perturbadas de los gases.

Indicación. La condición de frontera (1) se obtiene mediante la igualdad (4) de la respuesta al problema 1. La condición de frontera (2) expresa la conservación de la frontera de separación de los gases (la igualdad de las componentes según la normal de las velocidades de las partículas de ambos gases adyacentes en un mismo lugar a la superficie Σ).

4. Para la desviación $u(x, y, t)$ de las partículas de la membrana del plano del estado no perturbado (el plano XOY) obtenemos:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right), \quad 0<t<+\infty, \quad (x, y)\in G, \tag{1}$$

donde G es la región sobre el plano (x, y) acotada por el contorno Γ,

$$u(x, y, 0)=f(x, y), \quad u_t(x, y, 0)=F(x, y), \quad (x, y)\in G, \tag{2}$$

$$u|_\Gamma=0, \quad 0<t<+\infty^{*)} \tag{3}$$

*) La deducción más detallada de la ecuación (1) véase en [7], págs. 39-42.

5. La ecuación (1) en la respuesta al problema anterior se debe sustituir por la ecuación

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a_1^2\left\{\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right\}-\frac{\rho_0 a_0^2}{\Omega_0 \rho_1}\iint\limits_G u\,dx\,dy, \qquad (1)$$

donde a_1 es la velocidad de la propagación de las ondas transversales en la membrana; ρ_1, la densidad superficial de la membrana; Ω_0, el volumen del recipiente; ρ_0, la densidad no perturbada del aire; a_0, la velocidad de la propagación de las perturbaciones pequeñas en el aire.

Indicación. En virtud de la condición $a_0 \gg a_1$ la presión del aire encerrado en el recipiente al calcular las fuerzas que actúan sobre un elemento de la membrana, se puede considerar independiente de las coordenadas del elemento en examen de la membrana y determinado por la variación general del volumen del recipiente como el resultado de la flexión de la membrana.

Observación. Si la velocidad de la propagación de las perturbaciones pequeñas en el medio ambiente es considerablemente menor que la velocidad de la propagación de las perturbaciones en la membrana, es decir, si $a_0 \ll a_1$, entonces la reacción del medio sobre cada elemento de la membrana se determina por el estado del medio en la proximidad inmediata a este elemento. En este caso la ecuación de las vibraciones de la membrana*) puede ser escrita en la forma

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a_1^2\left\{\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right\}-\frac{\rho_0}{\rho_1}\frac{\partial u}{\partial t}.$$

6. $$\left\{\frac{\partial}{\partial t}+(v_0,\ \nabla)\right\}^2 U=a^2\Delta U, \qquad (1)$$

donde U es el potencial de las velocidades de las partículas del gas excitadas por las perturbaciones pequeñas, $v_0=iv_1^{(0)}+jv_2^{(0)}+kv_3^{(0)}$, el vector de la velocidad del movimiento del medio, el operador $(v_0,\ \nabla)$ se determina por la relación

$$(v_0,\ \nabla)=v_1^{(0)}\frac{\partial}{\partial x}+v_2^{(0)}\frac{\partial}{\partial y}+v_3^{(0)}\frac{\partial}{\partial z}, \qquad (2)$$

y el potencial U se considera como una función de las coordenadas $(x,\ y,\ z)$ del punto geométrico y del tiempo t en el sistema inmóvil de coordenadas con respecto al cual el medio se mueve con la velocidad v_0; con otras palabras, U se estudia en las coordenadas de Euler **).

Si el eje x coincide en dirección con el vector v_0, entonces

$$(v_0,\ \nabla)=v_0\frac{\partial}{\partial x}$$

y la ecuación (1) toma la forma

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2}+2v_0\frac{\partial^2 U}{\partial x\,\partial t}+v_0^2\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}=a^2\left\{\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 U}{\partial z^2}\right\}. \qquad (1')$$

Iguales ecuaciones tienen lugar para la densidad y para la presión.

---

*) Véase [38], pág. 224.

**) Para más detalles sobre las coordenadas de Lagrange y de Euler véase el problema 4, § 1, cap. II.

Indicación. Primero se deben deducir las ecuaciones básicas de la hidrodinámica en las coordenadas de Euler

$$\frac{\partial v^*}{\partial t}+(v^*, \nabla) v^*=-\frac{1}{\rho} \operatorname{grad} p, \qquad (3)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t}+\operatorname{div}(\rho v^*)=0, \qquad (4)$$

$$p=f(\rho), \quad f(\rho)=p_0 \frac{\rho^k}{\rho_0^k}, \quad k=\frac{c_p}{c_v}, \qquad (5)$$

$v^* = v_0 + v$, $\rho = \rho_0 + \widetilde{\rho}$, $p = p_0 + \widetilde{p}$, donde v^* es la velocidad total («absoluta») de las partículas; v_0, la velocidad del desplazamiento; v, la velocidad relativa y las magnitudes ρ_0, p_0, $\widetilde{\rho}$, $\widetilde{p}$ se determinan del mismo modo que en el problema 1. El hecho de que las ecuaciones (3), (4), (5) se vuelvan lineales y la eliminación de p y ρ, conducen, a la ecuación (1) de la respuesta.

La ecuación (1) puede ser obtenida también por el siguiente procedimiento. En el sistema de coordenadas (O', x', y', z') que se mueve junto con el medio y que coincide en el momento $t = 0$ con el sistema inmóvil (O, x, y, z) para el potencial $U = U(x', y', z', t)$, tendrá lugar la ecuación

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2}=a^2\left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 U}{\partial z^2}\right). \qquad (6)$$

El paso de las coordenadas de Euler (x', y', z', t) a las coordenadas de Euler (x, y, z, t) transforma la ecuación (6) en la ecuación (1) de la respuesta.

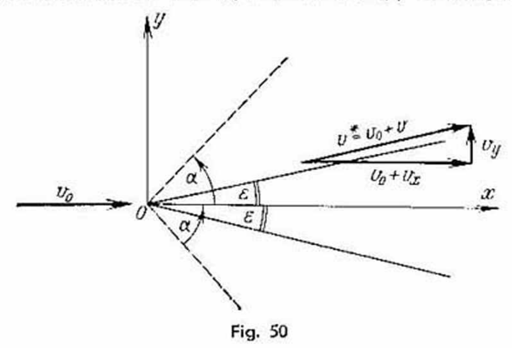


Fig. 50

7. Hacemos coincidir el eje Oz del sistema rectangular cartesiano con la arista de la cuña de modo que la cuña sea simétrica con respecto al plano xOz y la dirección de la velocidad del flujo corriente v_0 coincida con la dirección del eje Ox (fig. 50). El ángulo de abertura de la cuña lo denominamos por 2ε. Puesto que en el caso dado el potencial de las velocidades U, $v = \operatorname{grad} U$ no depende de z y de t, entonces la ecuación (1') de la respuesta al problema anterior se lleva a la forma

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}=\frac{1}{M^2-1} \frac{\partial^2 U}{\partial y^2}, \qquad (1)$$

donde $M = \frac{v_0}{a} > 1$ en virtud del planteamiento del problema (la velocidad del flujo corriente es mayor que la velocidad del sonido). La ecuación (1) tiene lugar entre la superficie de la cuña y la onda de interrupción (discontinuidad) débil*). Sobre la superficie de la cuña tenemos:

$$\frac{\partial U}{\partial y} = \left(v_0 + \frac{\partial U}{\partial x}\right) \operatorname{tg} \varepsilon \quad \text{para} \quad y = x \operatorname{tg} \varepsilon. \tag{2}$$

Sobre la onda de interrupción débil

$$U = 0 \quad \text{para} \quad y = x \operatorname{tg} \alpha, \tag{3}$$

donde $\operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{\sqrt{M^2 - 1}}$.

8. En el sistema cilíndrico de coordenadas, cuyo eje Oz coincide con el eje del cono (fig. 51) para el potencial de velocidades $U = U(r, z)$ obtenemos el

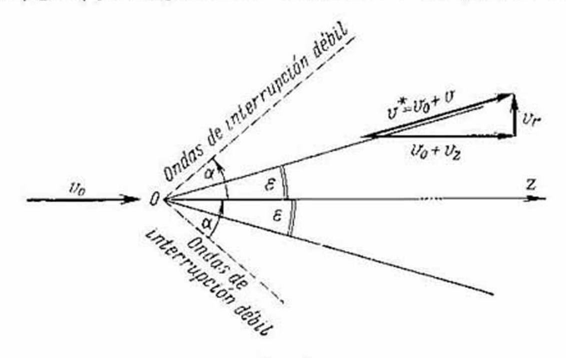


Fig. 51

problema de contorno

$$\frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = \frac{1}{M^2 - 1} \left\{ \frac{\partial^2 U}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial r} \right\} \tag{1}$$

entre la superficie del cono y la superficie de la onda de interrupción (discontinuidad) débil

$$\frac{\partial U}{\partial r} = \left\{ v_0 + \frac{\partial U}{\partial z} \right\} \operatorname{tg} \varepsilon \tag{2}$$

*) La onda de interrupción (discontinuidad) débil separa la región perturbada de la no perturbada; sobre la superficie de la onda de interrupción débil el potencial U y sus derivadas de primer orden son continuas. Para más detalles véase [15].

sobre la superficie del cono, es decir, para $r = z \operatorname{tg} \alpha$; sobre la superficie de la onda de interrupción débil

$$U = 0. \tag{3}$$

9. Para $\zeta(x, y, t)$ obtenemos el problema de contorno

$$\frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} = a^2 \left(\frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2} \right), \tag{1}$$

$a^2 = gh$, g es la aceleración de la fuerza de gravedad;

$$\zeta(x, y, 0) = f(x, y), \quad \zeta_t(x, y, 0) = F(x, y), \tag{2}$$

$$\frac{\partial \zeta}{\partial n} = 0 \text{ sobre la pared del estanque,} \tag{3}$$

donde $\frac{\partial}{\partial n}$ es la derivada con respecto a la dirección de la normal a la pared. Para el potencial de las velocidades horizontales $U(x, y, t)$ obtenemos el problema de contorno

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = a^2 \left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} \right), \quad a^2 = gh, \tag{1'}$$

$$U(x, y, 0) = f_1(x, y), \quad U_t(x, y, 0) = F_1(x, y), \tag{2'}$$

$$\frac{\partial U}{\partial n} = 0 \text{ sobre la pared del estanque.} \tag{3'}$$

Indicación. Obtenemos primero:
la ecuación de continuidad

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} = -\operatorname{div} w,$$

donde w es el vector de la velocidad horizontal;
la ecuación del movimiento

$$\rho \frac{\partial w}{\partial t} = -\operatorname{grad}_{xy} p = -i \frac{\partial p}{\partial x} - j \frac{\partial p}{\partial y};$$

la ecuación que expresa la presión en el líquido a una distancia z del fondo del estanque

$$p - p_0 = g\rho (h + \zeta - z),$$

y después se realizan las eliminaciones necesarias (véase también la solución del problema 1).

10. La ecuación del potencial de las velocidades horizontales toma la forma

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = a^2 \left\{ \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} \right\} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p_0}{\partial t}, \quad a^2 = gh. \tag{1}$$

Las condiciones iniciales y de frontera se formulan como en la respuesta al problema anterior.

11.
$$\rho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\frac{\partial\sigma_x}{\partial x}+\frac{\partial\tau_{xy}}{\partial y}+\frac{\partial\tau_{xz}}{\partial z}+X,$$
$$\rho\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}=\frac{\partial\tau_{yx}}{\partial x}+\frac{\partial\sigma_y}{\partial y}+\frac{\partial\tau_{yz}}{\partial z}+Y,$$
$$\rho\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}=\frac{\partial\tau_{zx}}{\partial x}+\frac{\partial\tau_{zy}}{\partial y}+\frac{\partial\sigma_z}{\partial z}+Z,$$

donde σ_x, τ_{xy}, τ_{xz} son las proyecciones sobre los ejes de coordenadas del vector de la tensión que actúa sobre el área perpendicular al eje x; análogamente se determinan τ_{yx}, σ_y, τ_{yz} y τ_{zx}, τ_{zy}, σ_z; con esto las σ_x, σ_y, σ_z se llaman tensiones normales, y τ_{xy}, τ_{xz}, τ_{yz}, los esfuerzos tangenciales o las tensiones de rompimiento; X, Y, Z, las proyecciones sobre los ejes de coordenadas del vector de la densidad de las fuerzas volumétricas.

12. *Indicación*. De las ecuaciones del movimiento obtenidas en la respuesta al problema 11 y de la ley de Hooke dada en la nota 2) al problema presente, no es difícil deducir las ecuaciones siguientes para las componentes del vector U:

$$\rho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\mu\Delta u+(\lambda+\mu)\frac{\partial\Theta}{\partial x}+X,$$
$$\rho\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}=\mu\Delta v+(\lambda+\mu)\frac{\partial\Theta}{\partial y}+Y,$$
$$\rho\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}=\mu\Delta w+(\lambda+\mu)\frac{\partial\Theta}{\partial z}+Z,$$

donde $\Theta=\operatorname{div} U$.

14. $$U=i\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}+\frac{\partial\psi}{\partial y}\right)+j\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}-\frac{\partial\psi}{\partial x}\right),\quad \varphi=\varphi(x,\ y,\ t),\quad \psi=\psi(x,\ y,\ t),$$
$$\rho\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}=(\lambda+2\mu)\left\{\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}\right\}+F_1(x,\ y,\ t),$$
$$\rho\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}=\mu\left\{\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2}\right\}+F_2(x,\ y,\ t),$$

$F_1(x,\ y,\ t)$ y $F_2(x,\ y,\ t)$ son los términos independientes que se obtienen del vector de la densidad de las fuerzas volumétricas.

15. a)
$$\left.\begin{aligned}&\sigma_x\cos(n,\ x)+\tau_{xy}\cos(n,\ y)+\tau_{xz}\cos(n,\ z)=0,\\&\tau_{yx}\cos(n,\ x)+\sigma_y\cos(n,\ y)+\tau_{yz}\cos(n,\ z)=0,\\&\tau_{zx}\cos(n,\ x)+\tau_{zy}\cos(n,\ y)+\sigma_z\cos(n,\ z)=0,\end{aligned}\right\}\qquad(1)$$

donde $\cos(n,\ x)$, $\cos(n,\ y)$, $\cos(n,\ z)$ son los cosenos directores de la normal al elemento de frontera examinado.

b) $$U=0,\quad \text{es decir,}\quad u=0,\quad v=0,\ w=0.\qquad(2)$$

Tomando el plano xz por la frontera y dirigiendo el eje y al interior del cuerpo, en el caso del problema plano*) obtenemos las expresiones siguientes de las

*) Véase el problema 14.

condiciones de frontera:

a') $$\left[a^2\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}+(a^2-2b^2)\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}-2b^2\frac{\partial^2\psi}{\partial x\,\partial y}\right]_{y=0}=0, \tag{1'}$$

$$\left[2\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\,\partial y}+\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2}-\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}\right]_{y=0}=0;$$

b') $$\left[\frac{\partial\varphi}{\partial x}+\frac{\partial\psi}{\partial x}\right]_{y=0}=0,\quad \left[\frac{\partial\varphi}{\partial y}-\frac{\partial\psi}{\partial x}\right]_{y=0}=0,$$

donde φ y ψ son los potenciales que figuran en la respuesta al problema anterior.

Indicación. Los primeros miembros de las igualdades (1) son las proyecciones sobre los ejes de coordenadas del vector de la tensión aplicada al área con la normal n*).

16. Para el desplazamiento radial $u(r, t)$ de la partícula del tubo, que está a la distancia r del eje del tubo obtenemos

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r}-\frac{u}{r^2}\right)+P(r, t),\quad r_1\leqslant r\leqslant r_2,\quad 0<t<+\infty. \tag{1}$$

donde r_1 y r_2 son los radios interior y exterior del tubo, $a^2=\frac{\lambda+2\mu}{\rho}$; a, la velocidad de la propagación de las deformaciones longitudinales,

$$\left[r\frac{\partial u}{\partial r}+hu\right]_{r=r_1}=0,\quad \left[r\frac{\partial u}{\partial r}+hu\right]_{r=r_2}=0,\quad 0<t<+\infty, \tag{2}$$

donde $h=\frac{\lambda}{\lambda+2\mu}$,

$$\left.\begin{aligned} u(r, 0)&=\varphi(r), & 0\leqslant r\leqslant r_0,\\ u_t(r, 0)&=\psi(r), & 0\leqslant r\leqslant r_0.\end{aligned}\right\} \tag{3}$$

17. Para el desplazamiento radial $u(r, t)$ de las partículas de la capa esférica, en las condiciones del planteamiento del problema obtenemos:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\left\{\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+\frac{2}{r}\frac{\partial u}{\partial r}-\frac{2u}{r^2}\right\},\quad r_1\leqslant r\leqslant r_2,\quad 0<t<+\infty, \tag{1}$$

a^2 tiene el mismo sentido que en el problema anterior,

$$(\lambda+2\mu)\frac{\partial u}{\partial r}+\lambda\frac{u}{r}=\left\{\begin{matrix}-p(t) & \text{para} & r=r_1,\\ 0 & \text{para} & r=r_2,\end{matrix}\right\} \tag{2}$$

$$\left.\begin{aligned} u(r, 0)&=0,\\ u_t(r, 0)&=0,\end{aligned}\right\}\ r_1\leqslant r\leqslant r_2. \tag{3}$$

18. Para las desviaciones transversales de los puntos de la placa desde la posición no perturbada, obtenemos la ecuación

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}+c^2\left(\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}+2\frac{\partial^4 u}{\partial x^2\,\partial y^2}+\frac{\partial^4 u}{\partial y^4}\right)=\frac{1}{2\rho h}p(x, y, t), \tag{1}$$

*) Para más detalles véase [26], págs. 17-18.

donde $c^2 = \frac{Eh^2}{3\rho(1-m^2)}$; E, el módulo de Young; m, el coeficiente de Poisson, $2h$, el espesor de la placa; ρ, la densidad de masa de la placa; $p(x, y, t)$, la fuerza transversal que actúa sobre una unidad del área de la placa.

Si la placa está sobre una base elástica, entonces

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + c^2\left(\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 u}{\partial y^4}\right) + \frac{k}{2h\rho}u = \frac{1}{2h\rho}p(x, y, t), \qquad (1')$$

k es el coeficiente de la elasticidad de la base*).

Nota. El conjunto de los términos entre paréntisis es cómodo escribirlo en la forma $\Delta_2\Delta_2 u$, donde $\Delta_2 = \operatorname{div}\operatorname{grad}$ es el operador de Laplace sobre el plano.

19. $$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + c^2\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial \varphi^2}\right)^2$$

$$u = 0, \quad 0 \leqslant r < r_0, \quad 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi, \quad 0 < t < +\infty, \qquad (1)$$

$$u(r, \varphi, 0) = f(r, \varphi), \quad u_t(r, \varphi, 0) = F(r, \varphi), \quad 0 \leqslant r \leqslant r_0, \quad 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi, \qquad (2)$$

$$u(r_0, \varphi, t) = u_r(r_0, \varphi, t) = 0, \quad 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi, \quad 0 < t < +\infty. \qquad (3)$$

20. En las coordenadas esféricas con origen en el dipolo con el eje $\theta = 0$ dirigido según el dipolo, obtenemos el problema de contorno

$$\frac{\partial^2 H_\varphi}{\partial t^2} = a^2\left\{\frac{1}{r}\frac{\partial^2(rH_\varphi)}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial\theta}\left[\frac{1}{\operatorname{sen}\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(\operatorname{sen}\theta H_\varphi)\right]\right\}, \quad r > 0, \quad t > 0, \qquad (1)$$

$$H_\varphi|_{t=0} = 0 \qquad \text{para} \quad r > 0, \qquad (2)$$

$$\left.\frac{\partial H_\varphi}{\partial t}\right|_{t=0} = -\frac{3aM_0 \operatorname{sen}\theta}{r^4} \qquad \text{para} \quad r > 0, \qquad (2')$$

$$H_\varphi|_{r\to 0} = -\frac{\omega M_0}{ar^2}\operatorname{sen}\omega t \operatorname{sen}\theta \qquad \text{para} \quad t > 0. \qquad (3)$$

Indicación. Utilizar el sistema de ecuaciones de Maxwell en las coordenadas esféricas. En virtud de la simetría cilíndrica y de las reflexiones electrodinámicas elementales $H_r = H_\theta = H_\varphi = 0$ para $t \geqslant 0$.

Para $t = 0$ se tiene el campo electrostático excitado por el dipolo electrostático de modo que $H_\varphi|_{t=0} = 0$ y

$$E_r|_{t=0} = \frac{2M_0\cos\theta}{r^3}, \qquad E_\theta|_{t=0} = \frac{M_0 \operatorname{sen}\theta}{r^3}.$$

La condición inicial (2′) la obtenemos de estas relaciones mediante la ecuación de Maxwell

$$\frac{1}{r}\left[\frac{\partial(rE_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial E_r}{\partial\theta}\right] = -\frac{1}{a}\frac{\partial H_\varphi}{\partial t}.$$

Por último, la condición de frontera (3) expresa la intensidad del campo magnético en los puntos tan cercanos al dipolo, que se puede despreciar el tiempo de la propagación de las perturbaciones (véase [17]).

*) Véase el problema 10 § 1 cap. II.

§ 2. Problemas sencillos: diferentes métodos de resolución

21. a) $u(r, t) =$

$$= \frac{(r-at)\,\varphi(r-at) + (r+at)\,\varphi(r+at)}{2r} + \frac{1}{2ar} \int_{r-at}^{r+at} \xi\psi(\xi)\,d\xi, \qquad (1)$$

dondo las funciones $\varphi(\xi)$ y $\psi(\xi)$ son continuas de forma par para ξ negativos;

b) $$\lim_{r\to 0} u(r, t) = at\varphi'(at) + \varphi(at) + t\psi(at). \qquad (2)$$

Indicación. La fórmula (1) se obtiene en el supuesto que $u(r, t)$ quede acotado cuando $r \to 0$.

22. $$u(r, t) = \frac{1}{2ar} \int_0^t d\tau \int_{r-a(t-\tau)}^{r+a(t-\tau)} \xi f(\xi, \tau)\,d\xi,$$

donde $f(\xi, \tau)$ es continua de forma par para los valores negativos de ξ.

23. Con las condiciones iniciales a):

$$u(r, t) = \begin{cases} U_0 & \text{para} \quad 0 \leqslant t < \dfrac{r_0 - r}{a}, \\ U_0 \dfrac{r-at}{2r} & \text{para} \quad \dfrac{r_0 - r}{a} < t < \dfrac{r_0 + r}{a}, \\ 0 & \text{para} \quad \dfrac{r_0 + r}{a} < t < +\infty, \end{cases} \quad \text{para} \quad 0 < r < r_0,$$

$$u(r, t) = \begin{cases} 0 & \text{para} \quad 0 \leqslant t < \dfrac{r - r_0}{a}, \\ U_0 \dfrac{r-at}{2r} & \text{para} \quad \dfrac{r - r_0}{a} < t < \dfrac{r + r_0}{a}, \\ 0 & \text{para} \quad \dfrac{r + r_0}{a} < t < +\infty, \end{cases} \quad \text{para} \quad r_0 < r < +\infty.$$

Con las condiciones iniciales b):

$$u(r, t) = \begin{cases} U_0 t & \text{para} \quad 0 \leqslant t < \dfrac{r_0 - r}{a}, \\ U_0 \dfrac{r_0^2 - (r-at)^2}{4ar} & \text{para} \quad \dfrac{r_0 - r}{t} < t < \dfrac{r_0 + r}{a}, \\ 0 & \text{para} \quad \dfrac{r_0 + r}{a} < t < +\infty, \end{cases} \quad \text{para} \quad 0 < r < r_0,$$

$$u(r, t) = \begin{cases} 0 & \text{para} \quad 0 \leqslant t < \dfrac{r - r_0}{a}, \\ U_0 \dfrac{r_0^2 - (r-at)^2}{4ar} & \text{para} \quad \dfrac{r - r_0}{a} < t < \dfrac{r_0 + r}{a}, \\ 0 & \text{para} \quad \dfrac{r_0 + r}{a} < t < +\infty. \end{cases} \quad \text{para} \; r_0 < r < +\infty.$$

24. El potencial de las velocidades de las partículas del gas es igual a $u(r, t)$ de la respuesta al problema anterior con las condiciones iniciales b), si se supone que $U_0 = -a^2 \frac{\rho_1}{\rho_0}$, donde $a^2 = k \frac{p_0}{\rho_0}$.

25. Sea $U(r, t)$ la solución del problema 23 b) para el espacio no acotado (véase la respuesta al problema 23 b)); entonces

a) $u(x, y, z, t) = U(\tilde{r}, t) - U(\tilde{\tilde{r}}, t)$,

b) $u(x, y, z, t) = U(\tilde{r}, t) + U(\tilde{\tilde{r}}, t)$,

donde $\tilde{r} = \sqrt{x^2 + y^2 + (z - z_0)^2}$, $\tilde{\tilde{r}} = \sqrt{x^2 + y^2 + (z + z_0)^2}$.

26. Sea $U(r, t)$ la misma función que en la respuesta al problema anterior; entonces

a) $u(x, y, z, t) = U(r_1, t) - U(r_2, t) + U(r_3, t) - U(r_4, t)$,
b) $u(x, y, z, t) = U(r_1, t) + U(r_2, t) - U(r_3, t) - U(r_4, t)$,
donde

$$r_1 = \sqrt{x^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2}, \quad r_2 = \sqrt{x^2 + (y + y_0)^2 + (z - z_0)^2},$$
$$r_3 = \sqrt{x^2 + (y + y_0)^2 + (z + z_0)^2}, \quad r_4 = \sqrt{x^2 + (y - y_0)^2 + (z + z_0)^2}.$$

27. $\varphi(r, t) = \dfrac{-q\left(t - \frac{r}{a}\right)}{4\pi r}$, $\quad q(t) = 0$ para $t < 0$.

Indicación. $\varphi(r, t)$ es la solución del problema de contorno

$$\varphi_{tt} = a^2 \Delta\varphi, \tag{1}$$
$$\varphi|_{t=0} = \varphi_t|_{t=0} = 0, \tag{2}$$
$$\lim_{r \to 0} 4\pi r^2 \varphi_r = q(t). \tag{3}$$

28. a) Sea que el manantial está en el plano $z = z_0$ y tiene las coordenadas polares r_0, θ_0, $0 < \theta_0 < \frac{\pi}{4}$. Entonces, designando por $\varphi(r, t)$ la solución del problema anterior, obtenemos

$$\tilde{\varphi}(x, y, z, t) = \sum_{k=0}^{n-1} \{\varphi(r_k^+, t) + \varphi(r_k^-, t)\}, \tag{1}$$

donde

$$r_k^+ = \sqrt{r^2 + r_0^2 - 2rr_0 \cos\left(\theta + \theta_0 + \frac{2k\pi}{n}\right) + (z - z_0)^2}, \tag{2}$$

$$r_k^- = \sqrt{r^2 + r_0^2 - 2rr_0 \cos\left(\theta - \theta_0 - \frac{2k\pi}{n}\right) + (z - z_0)^2}. \tag{3}$$

b) Sea que el manantial está dentro de la capa $0 \leqslant z \leqslant l$ y tiene las coordenadas x_0, y_0, z_0, $0 < z_0 < l$. Denotando por $\varphi(r, t)$ la solución del problema 27, obtenemos:

$$\tilde{\varphi}(x, y, z, t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \{\varphi(r_k^+, t) + \varphi(r_k^-, t)\}, \tag{1'}$$

donde

$$r_k^+ = \sqrt{r^2 + (z + z_0 - 2kl)^2}, \tag{2'}$$

$$r_k^- = \sqrt{r^2 + (z - z_0 - 2kl)^2}, \tag{3'}$$

aquí $r = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}$.

Observemos que para cada valor de $t > 0$ la serie (1′) formalmente infinita de facto se reduce cada vez a la suma de un número finito de términos, dado que

$$\varphi(r_k^+, t) = 0 \quad \text{para} \quad t < \frac{r_k^+}{a}, \qquad \varphi(r_k^-, t) = 0 \quad \text{para} \quad t < \frac{r_k^-}{a}.$$

29. $$u^*(x, y, t) = \frac{1}{2\pi a}\left\{\frac{\partial}{\partial t}\iint\limits_{\rho \leqslant at} \frac{\varphi^*(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta}{\sqrt{a^2t^2 - \rho^2}} + \iint\limits_{\rho \leqslant at} \frac{\psi^*(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta}{\sqrt{a^2t^2 - \rho^2}} + \int_0^t d\tau \iint\limits_{\rho \leqslant a(t-\tau)} \frac{f^*(\xi, \eta, \tau)\, d\xi\, d\eta}{\sqrt{a^2(t-\tau)^2 - \rho^2}}\right\},$$

donde $\rho = \sqrt{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2}$.

30. $$u^*(x, y, t) = \frac{1}{2\pi a}\left\{\frac{\partial}{\partial t}\iint\limits_{\rho \leqslant at} \varphi^*(\xi, \eta) \frac{\operatorname{ch} c\sqrt{a^2t^2 - \rho^2}}{\sqrt{a^2t^2 - \rho^2}}\, d\xi\, d\eta + \iint\limits_{\rho \leqslant at} \psi^*(\xi, \eta) \frac{\operatorname{ch} c\sqrt{a^2t^2 - \rho^2}}{\sqrt{a^2t^2 - \rho^2}}\, d\xi\, d\eta + \int_0^t d\tau \iint\limits_{\rho \leqslant a(t-\tau)} f^*(\xi, \eta, \tau) \frac{\operatorname{ch} c\sqrt{a^2(t-\tau)^2 - \rho^2}}{\sqrt{a^2(t-\tau)^2 - \rho^2}}\, d\xi\, d\eta\right\},$$

donde $\rho = \sqrt{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2}$, si en la ecuación delante de c^2u está el signo más; si delante de este término está el signo menos, entonces en la respuesta dada en todas partes ch debe sustituir por cos.

Indicación. La solución de la ecuación

$$u_{tt} = a^2(u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}), \tag{1}$$

que satisface las condiciones iniciales

$$u|_{t=0} = 0, \quad u_t|_{t=0} = F(x, y)\, e^{cz}, \tag{2}$$

se relaciona por la relación

$$u(x, y, z, t) = e^{cz}u^*(x, y, t)$$

con la solución de la ecuación

$$u_{tt}^* = a^2(u_{xx}^* + u_{yy}^*) + c^2u^*$$

que satisface las condiciones iniciales

$$u^*|_{t=0} = 0, \quad u_t^*|_{t=0} = F(x, y),$$

lo que no es difícil obtener mediante la presentación de la solución del problema (1), (2) mediante la integral de Poisson*). Si en la ecuación ante c^2u está el signo menos, entonces se debe realizar la sustitución $u(x, y, z, t)=e^{icz}u^*(x, y, t)$.

31. Para el potencial de las velocidades $u(r, t)$ obtenemos la expresión

$$u(\rho, t)=\begin{cases} 0 & \text{para} \quad t\leqslant\frac{\rho}{a}, \\ -\frac{1}{2\pi a}\int\limits_0^{t-\frac{\rho}{a}}\frac{q(\tau)\,d\tau}{\sqrt{a^2(t-\tau)^2-\rho^2}} & \text{para} \quad t>\frac{\rho}{a} \end{cases} \tag{1}$$

o la expresión equivalente

$$u(\rho, t)=\begin{cases} 0 & \text{para} \quad t\leqslant\frac{\rho}{a}, \\ -\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{\operatorname{Arcch}\frac{at}{\rho}} q\left(t-\frac{\rho}{a}\operatorname{ch}\zeta\right)d\zeta & \text{para} \quad t>\frac{\rho}{a}, \end{cases} \tag{2}$$

o, si bajo la integral se considera $q(t)=0$ para $t<0$

$$u(\rho, t)=-\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{+\infty} q\left(t-\frac{\rho}{a}\operatorname{ch}\zeta\right)d\zeta,$$

donde $\rho=\sqrt{x^2+y^2}$ si la recta sobre que están los manantiales se toma por el eje z.

Indicación. $u(\rho, t)$ es la solución del problema de contorno

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial\rho^2}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial u}{\partial\rho}\right), \quad 0\leqslant\rho<+\infty, \quad 0<t<+\infty,$$

$$\lim_{\rho\to 0}\left(2\pi\rho\frac{\partial u}{\partial\rho}\right)=q(t), \quad 0<t<+\infty,$$

$$u(\rho, 0)=u_t(\rho, 0)=0, \qquad 0<\rho<+\infty.$$

Formalmente $u(\rho, t)$ en la forma (3) se puede obtener mediante el método del «descenso» (la integración con respecto a z entre $-\infty$ y $+\infty$) de la solución del problema 27; después no es difícil verificar que con la condición de acotación de $q'(t)$ la función obtenida de esta manera satisface todas las condiciones del problema.

Observación. En el origen de las coordenadas $u(\rho, t)$ tiene la singularidad logarítmica con respecto a ρ. Usando la forma (1) para $u(\rho, t)$ y utilizando la integración por partes y la fórmula de Taylor, se puede representar $u(\rho, t)$ en la forma

$$u(\rho, t)=\frac{1}{a^2}q\left(t-\frac{\rho}{a}\right)\ln\rho-\frac{1}{a^2}q(0)\ln 2t-\frac{1}{a^2}\int\limits_0^t q'(\tau)\ln 2(t-\tau)\,d\tau+\varepsilon(\rho, t),$$

*) Véase [2], tomo II, págs, 553-554.

donde $\varepsilon(\rho, t) \longrightarrow 0$ para $\rho \longrightarrow 0$.

32.
$$u(x, y, t) = -\frac{1}{2\pi} \sum_{k=1}^{4} \int_0^{+\infty} q\left(t - \frac{\rho_k}{a} \operatorname{ch} \zeta\right) d\zeta,$$

donde

$$\rho_1 = \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}, \qquad \rho_2 = \sqrt{(x+x_0)^2 + (y-y_0)^2},$$
$$\rho_3 = \sqrt{(x+x_0)^2 + (y+y_0)^2}, \qquad \rho_4 = \sqrt{(x-x_0)^2 + (y+y_0)^2}.$$

33. Para el potencial de las velocidades de las partículas del gas fuera de la esfera obtenemos la expresión

$$U(r, t) = \left\{\begin{array}{ll} -a\dfrac{r_0}{r} e^{-\frac{a}{r_0}\left(t - \frac{r-r_0}{a}\right)} \displaystyle\int_0^t \mu(\tau) e^{\frac{a\tau}{r_0}} d\tau, & t > \dfrac{r-r_0}{a}, \\ 0 & t < \dfrac{r-r_0}{a}, \end{array}\right\} \; r_0 < r < +\infty,$$

y fuera de la esfera, la expresión

$$U(r, t) = -\frac{r_0 A}{\frac{\omega}{a}\cos\frac{\omega}{a} r_0 + \frac{a}{r_0} \operatorname{sen} \frac{\omega}{a} r_0} \frac{\operatorname{sen}\frac{\omega}{a} r}{r} \operatorname{sen} \omega t +$$
$$+ \sum_{n=1}^{+\infty} B_n \frac{\operatorname{sen} \lambda_n r}{r} \operatorname{sen} a\lambda_n t, \quad 0 \leqslant r < r_0, \quad 0 < t < +\infty,$$

donde λ_n son las raíces positivas de la ecuación

$$\operatorname{tg}(r_0\lambda) = -\frac{r_0\lambda}{a},$$

$$B_n = \frac{\displaystyle\int_0^{r_0} f(r) \operatorname{sen}(\lambda_n r)\, dr}{\displaystyle\int_0^{r_0} \operatorname{sen}^2(\lambda_n r)\, dr}$$

y

$$f(r) = \frac{\omega r_0 A}{\frac{\omega}{a}\cos\frac{\omega}{a} r_0 + \frac{a}{r_0} \operatorname{sen} \frac{\omega}{a} r_0} \operatorname{sen}\frac{\omega}{a} r.$$

Observación. La expresión de $U(r, t)$ para $0 \leqslant r \leqslant r_0$ se obtiene en el supuesto de que no haya resonancia, es decir, que $\widetilde{\lambda} = \frac{\omega}{a}$ no coincida con ninguno de los valores propios λ_n*).

*) Acerca de la búsqueda de la solución en el caso de la resonancia véase el problema 134, § 3, cap. II.

34. Sea que el centro de la esfera está sobre el eje Oz en el punto $z_0 > r_0 > 0$ y el plano $z = 0$ es la frontera del semiespacio en examen. Entonces, denotando por $U(r, t)$ la solución del problema anterior, obtenemos la solución del problema 34 en la forma

$$u(x, y, z, t) = U(r_1, t) + U(r_2, t) \text{ para } r_1 > r_0 \text{ y } z > 0,$$

$$u(x, y, z, t) = U(r_1, t) \qquad \text{para } 0 < r_1 < r_0,$$

donde $r_1 = \sqrt{x^2 + y^2 + (z - z_0)^2}$, $\quad r_2 = \sqrt{x^2 + y^2 + (z + z_0)^2}$.

35. Para el potencial de las velocidades obtenemos la expresión

$$U = \begin{cases} \operatorname{div} \dfrac{f\left(t - \dfrac{r - r_0}{a}\right)}{r} & \text{para} \quad t > \dfrac{r - r_0}{a}, \\ 0 & \text{para} \quad t < \dfrac{r - r_0}{a}, \end{cases}$$

donde el vector

$$f(t) = ar_0^2 e^{-\frac{at}{r_0}t} \int_0^t V(\tau) \operatorname{sen} \frac{a(t - \tau)}{r_0} e^{\frac{a\tau}{r_0}} d\tau.$$

Indicación. La solución del problema se puede buscar en la forma

$$U = \operatorname{div} \frac{f\left(t - \dfrac{r - r_0}{a}\right)}{r}.$$

La velocidad de las partículas del gas es

$$v = \operatorname{grad} U = \frac{3(fn)n - f}{r^3} + \frac{3(f'n)n - f'}{ar^2} + \frac{n(nf'')}{a^2 r}$$

(n es el vector unitario según la dirección de r; el tilde significa la diferenciación de f con respecto a su argumento) satisface la condición de frontera $v_r = Vn$ para $r = r_0$, de donde para f obtenemos la ecuación

$$f''(t) + \frac{2a}{r_0} f'(t) + \frac{2a^2}{r_0^2} f(t) = r_0 a^2 V(t).$$

36. Para el potencial de las velocidades U provocadas por una perturbación pequeña y para la perturbación de la presión $\tilde{p}$ obtenemos las expresiones

$$U(x, y) = \frac{v_0(y - x \operatorname{tg} \alpha)}{\operatorname{ctg} \varepsilon + \operatorname{tg} \alpha}, \quad 0 < x < +\infty, \quad x \operatorname{tg} \varepsilon \leqslant y \leqslant x \operatorname{tg} \alpha,$$

$$\tilde{p} = \rho_0 v_0^2 \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\operatorname{ctg} \varepsilon + \operatorname{tg} \alpha}.$$

Indicación. Para determinar $\tilde{p}$ se debe utilizar la relación (4) de la respuesta al problema 1*).

*) Se debe pasar en la relación indicada a las coordenadas de Euler y utilizar el carácter estacionario del proceso y la pequeñez de las perturbaciones. Acerca de las notaciones véase la respuesta al problema 7.

37. $U(r, x) =$

$$= -v_0 r \frac{-\sqrt{\frac{x^2}{r^2}\operatorname{tg}^2\alpha - 1} + \frac{1}{2}\frac{x}{r}\operatorname{tg}\alpha \ln \dfrac{\frac{x}{r}\operatorname{tg}\alpha + \sqrt{\frac{x^2}{r^2}\operatorname{tg}^2\alpha - 1}}{\frac{x}{r}\operatorname{tg}\alpha - \sqrt{\frac{x^2}{r^2}\operatorname{tg}^2\alpha - 1}}}{\sqrt{\nu^2-1} + \frac{1}{2}\operatorname{tg}\varepsilon\operatorname{tg}\alpha \ln \dfrac{\nu + \sqrt{\nu^2-1}}{\nu - \sqrt{\nu^2-1}}} \operatorname{tg}\varepsilon,$$

$$0 < x < +\infty, \quad \nu \operatorname{ctg}\alpha \leqslant \frac{x}{r} \leqslant \operatorname{ctg}\alpha, \quad \nu = \frac{\operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{tg}\varepsilon} > 1,$$

$$\tilde{p}\,|_{r = x \operatorname{tg}\varepsilon} = \rho_0 v_0^2 \frac{\ln \dfrac{\nu + \sqrt{\nu^2-1}}{\nu - \sqrt{\nu^2-1}}}{\sqrt{\nu^2-1} + \frac{1}{2}\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\varepsilon \ln \dfrac{\nu + \sqrt{\nu^2-1}}{\nu - \sqrt{\nu^2-1}}} \operatorname{tg}\alpha.$$

Indicación. Véase el problema 8; la solución de la ecuación (1) con las condiciones de frontera (2) y (3) se puede buscar en la forma

$$U(r, x) = r\psi\left(\frac{x}{r}\right) = r\psi(\zeta), \quad \zeta = \frac{x}{r}.$$

Para determinar $\tilde{p}$ se debe utilizar la relación (4) de la respuesta al problema 1.

39. Para establecer el potencial de las velocidades perturbadas provocadas por la influencia de la pared obtenemos el problema de contorno (en las coordenadas de Lagrange)

$$(1 - M^2)\,u_{xx} + u_{yy} = 0, \quad -\infty < x < +\infty, \quad 0 < y < +\infty, \quad M = \frac{U}{a}, \tag{1}$$

donde a es la velocidad del sonido en el gas,

$$u_y(x, 0) = U\varepsilon\omega \cos\omega x, \quad -\infty < x < +\infty. \tag{2}$$

a) En el caso de la velocidad subsónica del flujo $1 - M^2 > 0$ la ecuación (1) es elíptica,

$$u(x, y) = -\frac{U\varepsilon}{\sqrt{1-M^2}} e^{-\omega y\sqrt{1-M^2}} \cos\omega x.$$

b) En el caso de la velocidad supersónica del flujo $1 - M^2 < 0$

$$u(x, y) = -\frac{U\varepsilon}{\sqrt{M^2-1}} \operatorname{sen}\omega\left(x - y\sqrt{M^2-1}\right).$$

Indicación. En el caso elíptico la solución se debe buscar en la forma

$$u(x, y) = u_1(x)\,u_2(y)$$

y en el caso hiperbólico, en la forma de las ondas de propagación, teniendo en cuenta que en el caso hiperbólico (supersónico) las perturbaciones pequeñas se propagan hacia la derecha de los manantiales de perturbación. La condición de frontera (2) se obtiene de la condición exacta de frontera

$$\left(\frac{u_y}{u + u_x}\right)_{\text{front}} = \left(\frac{dy}{dx}\right)_{\text{front}}$$

despreciando las magnitudes pequeñas de orden superior.

10—0942

Observación. Comparando las soluciones en los casos elíptico y hiperbólico, vemos que las perturbaciones provocadas por la pared ondiforme a la medida de alejamiento de ella (el crecimiento de y) en el caso elíptico se amortiguan rápidamente y en el caso hiperbólico conservan su amplitud.

40.

$$\psi(r,t)=\left\{\begin{array}{ll}\pi U_0 & \text{para} \quad 0<t<\dfrac{r_0-r}{a},\\ U_0\left(\dfrac{\pi}{2}+\operatorname{arcsen}\dfrac{r_0-at}{r}\right) & \text{para } \dfrac{r_0-r}{a}<t<\dfrac{r_0+r}{a},\\ 0 & \text{para } \dfrac{r_0+r}{a}<t<+\infty,\end{array}\right\}0<r<r_0,$$

$$\psi(r,t)=\left\{\begin{array}{ll}0 & \text{para} \quad 0<t<\dfrac{r-r_0}{a},\\ U_0\left(\dfrac{\pi}{2}+\operatorname{arcsen}\dfrac{r_0-at}{r}\right) & \text{para } \dfrac{r-r_0}{a}<t<\dfrac{r+r_0}{a},\\ 0 & \text{para } \dfrac{r+r_0}{a}<t<+\infty,\end{array}\right\}r_0<r<+\infty.$$

Indicación. Haciendo $x=r\cos\varphi$, $y=r\operatorname{sen}\varphi$, $\alpha=\cos\theta$, $\rho=\operatorname{sen}\theta$, realizar primero la integración con respecto a θ entre 0 y 2π y después efectuar la sustitución necesaria de la variable de integración; esto conducirá a la expresión (1) del planteamiento del problema.

41. *Indicación.* Realizar la integración con respecto a z entre $-\infty$ y $+\infty$ de las ondas esféricamente simétricas $\dfrac{f_1(at-r)}{r}$ y $\dfrac{f_2(at+r)}{r}$ y luego efectuar la sustitución necesaria de la variable de integración.

42. *Resolución.* Buscamos la solución de la ecuación

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial t}\right), \quad r^2=x^2+y^2$$

en la forma $u(r,t)=e^{-i\omega t}f(r)$; esto da:

$$u(r,t)=Ae^{-i\omega t}J_0(kr)+BH_0^{(1)}(kr)e^{-i\omega t}, \quad k=\frac{\omega}{a},$$

A y B son constantes arbitrarias*), $u_1(r,t)=Ae^{-i\omega t}J_0(kr)$, la onda cilíndrica monocromática estable que no tiene singularidades cuando $r=0$, para r grandes

$$u_1(r,t)\approx A\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{\cos\left(kr-\frac{\pi}{4}\right)}{\sqrt{kr}}e^{-i\omega t},$$

$u_2(r,t)=Be^{-i\omega t}H_{(0)}^{1}(kr)$ es la onda cilíndrica monocromática de propagación «divergente» que tiene una singularidad para $r=0$. Para r pequeños

$$u_2(r,t)\approx B\frac{2i}{\pi}\ln(kr)e^{-i\omega t},$$

para r grandes

$$u_2(r,t)\approx B\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{e^{i\left(kr-\omega t-\frac{\pi}{4}\right)}}{\sqrt{kr}}.$$

---

*) Acerca de las funciones J_0 y $H_0^{(1)}$ véase [7], págs. 574, 714, 725, 748, 753 y otras.

Integrando la onda monocromática plana

$$e^{-i\omega\left(t-\frac{x\cos\theta+y\,\mathrm{sen}\,\theta}{a}\right)}$$

con respecto al ángulo θ entre 0 y π, obtenemos

$$\tilde{u}_1(r,\ t)=e^{-i\omega t}\int_0^{\pi} e^{ikr\cos(\theta-\varphi)}\,d\theta=2\pi e^{-i\omega t}J_0(kr),\qquad k=\frac{\omega}{a}.$$

Si se realiza integración sobre el plano de la variable compleja θ a lo largo del camino L (fig. 52), entonces nos queda:

$$\tilde{u}_2(r,\ t)=e^{-i\omega t}\int_L e^{ikr\cos\theta}\,d\theta=\pi e^{-i\omega t}H_0^{(1)}(kr).$$

44. *Resolución.* Tomemos como plano de separación de los dos medios el $z=0$ (fig. 53). Las magnitudes correspondientes al semiespacio $z<0$ las marcamos con el subíndice 1 y las correspondientes al semiespacio $z>0$, con el subíndice 2. Designamos las ondas incidente, refleja y refractada, respectivamente, por

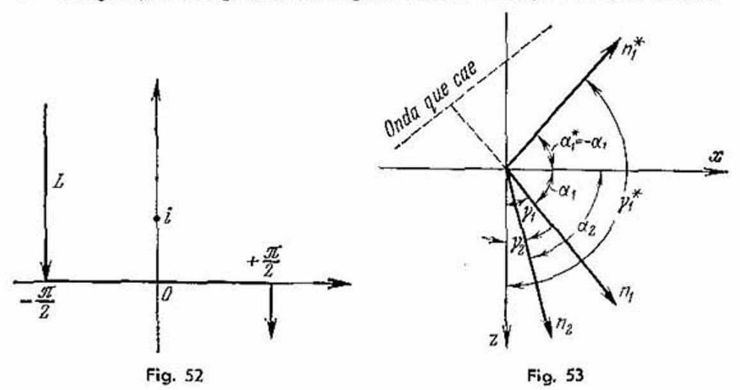


Fig. 52 Fig. 53

$$\varphi_1=A_1e^{i(\omega_1t-k_1n_1r)},$$
$$\varphi_1^*=A_1^*e^{i(\omega_1^*t-k_1^*n_1^*r)},$$
$$\varphi_2=A_2e^{i(\omega_2t-k_2n_2r)}.$$

Aquí $k_1=\frac{\omega_1}{a_1}$, $k_1^*=\frac{\omega_1^*}{a_1}$ y $k_2=\frac{\omega_2}{a_0}$ son los números de onda; ω_1, ω_1^*, ω_2, las frecuencias de las ondas incidente, refleja y refractada, a_1 y a_2, las velocidades de propagación de las ondas en el primer y segundo medios; n_1, n_1^*, n_2, los vectores unitarios en los sentidos de las direcciones de propagación de las ondas correspondientes; el vector $r=\{x,\ y,\ z\}$. Sobre el plano $z=0$ deben cumplirse

las condiciones de frontera*)

$$\rho_1\{\varphi_1+\varphi_1^*\}=\rho_2\varphi_2 \quad \text{para} \quad z=0. \tag{1}$$

$$\frac{\partial\varphi_1}{\partial z}+\frac{\partial\varphi_1^*}{\partial z}=\frac{\partial\varphi_2}{\partial z} \quad \text{para} \quad z=0. \tag{2}$$

Consideremos el vector $\boldsymbol{n}_1$ paralelo al plano xOz, es decir,

$$\boldsymbol{n}_1=\{\cos\alpha_1,\ 0,\ \cos\gamma_1\}.$$

Escribimos ahora en la forma de coordenadas los vectores $\boldsymbol{n}_1^*$ y $\boldsymbol{n}_2$:

$$\boldsymbol{n}_1^*=\{\cos\alpha_1^*,\ \cos\beta_1^*,\ \cos\gamma_1^*\},$$
$$\boldsymbol{n}_2=\{\cos\alpha_2,\ \cos\beta_2,\ \cos\gamma_2\}.$$

Dado que las funciones de τ: $e^{\nu_1\tau}$, $e^{\nu_2\tau}$, $e^{\nu_3\tau}$, con la condición que ν_1, ν_2, ν_3 son diferentes y linealmente independientes, entonces la sustitución de φ_1, φ_1^*, φ_2 en las condiciones de frontera (1) y (2) conduce a las igualdades

$$\left.\begin{aligned}&\omega_1^*=\omega_2=\omega_1,\\&k_1^*=\frac{\omega_1^*}{a_1}=k_1=\frac{\omega_1}{a_1},\end{aligned}\right\} \tag{3}$$

$$\cos\beta_1^*=\cos\beta_2=0, \tag{4}$$

es decir, los vectores unitarios $\boldsymbol{n}_1^*$ y $\boldsymbol{n}_2$ también son paralelos al plano xOz,

$$k_1\cos\alpha_1=k_1\cos\alpha_1^*=k_2\cos\alpha_2, \tag{5}$$

de donde se obtienen las relaciones conocidas entre los ángulos de incidencia, reflexión y refracción: $\alpha_1=-\alpha_1^*$ dado que la onda reflejada como y la onda incidente está en el semiespacio $z<0$

$$\frac{\cos\alpha_1}{\cos\alpha_2}=\frac{k_2}{k_1}=\frac{\dfrac{\omega}{a_2}}{\dfrac{\omega}{a_1}}=\frac{a_1}{a_2}.$$

Si las igualdades que se obtienen como resultado de la sustitución de φ_1, φ_1^*, φ_2 en las condiciones de frontera (1) y (2) simplificar por el factor variable común, entonces se obtienen las relaciones para determinar las amplitudes de las ondas refleja y refractada

$$\rho_1A_1+\rho_1A_1^*=\rho_2A_2,$$
$$k_1\cos\gamma_1A_1+k_1\cos\gamma_1^*A_1^*=k_2\cos\gamma_2A_2;$$

de estas ecuaciones, utilizando la igualdad $\cos\gamma_1^*=-\cos\gamma_1$, obtenemos

$$A_1^*=\frac{\rho_2k_1\cos\gamma_1-\rho_1k_2\cos\gamma_2}{\rho_2k_1\cos\gamma_1+\rho_1k_2\cos\gamma_2}A_1,$$

$$A_2=\frac{2\rho_1k_1\cos\gamma_1}{\rho_2k_1\cos\gamma_1+\rho_1k_2\cos\gamma_2}A_1.$$

45. Denotando por $\boldsymbol{n}_1$, $\boldsymbol{n}_1^*$, $\boldsymbol{n}_2$, al igual que en el problema anterior, los vectores unitarios en el sentido de las direcciones de las ondas incidente, refleja

---

*) Véase la respuesta al problema 3.

y refractada, obtenemos (véase fig. 53)

$$\alpha_1^* = -\alpha_1, \quad \frac{\cos\alpha_1}{\cos\alpha_2} = \frac{v_1}{v_2} = \nu_{12} = \sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}}, \quad v_1 = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon_1}}, \quad v_2 = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon_2}},$$

donde c es la velocidad de la luz en el vacío; ε_1 y ε_2, las constantes dieléctricas del primer y segundo medios (consideramos $\mu_1 = \mu_2 = 1$).

Indicación. La onda monocromática electromagnética plana se puede representar en la forma*)

$$E = E^{(0)} e^{i(\omega t - knr)}, \quad H = H^{(0)} e^{i(\omega t - knr)}.$$

Después se deben utilizar las condiciones sobre la frontera de separación de dos dieléctricos*).

46. Representando la onda incidente en la forma**)

$$E_1 = \{E_1 e^{i(\omega t - k_1 z)}; 0; 0\}, \quad H_1^* = \{0; \sqrt{\varepsilon_1}\, E_1 e^{i(\omega t - k_1 z)}; 0\},$$

obtenemos:

$$E_1^* = \{E_1^* e^{i(\omega t - k_1 z)}; 0; 0\}; \quad H_1^* = \{0; -\sqrt{\varepsilon_1}\, E_1^* e^{i(\omega t + k_1 z)}; 0\};$$
$$E_2 = \{E_2 e^{i(\omega t - k_2 z)}; 0; 0\}; \quad H_2 = \{0; -\sqrt{\varepsilon_2}\, E_2 e^{i(\omega t - k_2 z)}; 0\},$$

donde

$$E_1^* = \frac{1 - \nu_{12}}{1 + \nu_{12}} E_1, \quad E_2 = \frac{2}{1 + \nu_{12}} E_1, \quad \nu_{12} = \sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}}.$$

§ 3. Método de separación de variables

1. Problemas de contorno que no requieren la utilización de las funciones especiales

a) *Medios homogéneos*

47. La solución del problema de contorno

$$u_{tt} = a^2 (u_{xx} + u_{yy}), \quad 0 < x < l_1, \quad 0 < y < l_2 \quad 0 < t < +\infty, \tag{1}$$

$$u|_{x=0} = u|_{x=l_1} = u|_{y=0} = u|_{y=l_2} = 0, \tag{2}$$

$$u(x, y, 0) = Axy(l_1 - x)(l_2 - y), \quad u_t(x, y, 0) = 0,$$
$$0 < x < l_1, \quad 0 < y < l_2, \tag{3}$$

es

$$u(x, y, t) = \frac{64Al_1^2 l_2^2}{\pi^6} \times$$

$$\times \sum_{m,\, n=0}^{+\infty} \frac{\operatorname{sen}\dfrac{(2m+1)\pi x}{l_1} \operatorname{sen}\dfrac{(2n+1)\pi y}{l_2}}{(2m+1)^3 (2n+1)^3} \cos\left\{\pi a t \sqrt{\frac{(2m+1)^2}{l_1^2} + \frac{(2n+1)^2}{l_2^2}}\right\}.$$

*) Véase [7], pág. 495.
**) Véase [17], págs. 499-509.

48. La solución del problema de contorno

$$u_{tt}=a^2\{u_{xx}+u_{yy}\},\quad 0<x<l_1,\quad 0<y<l_2,\quad 0<t<+\infty, \tag{1}$$

$$u|_{x=0}=u|_{x=l_1}=y|_{y=0}=u|_{y=l_2}=0, \tag{2}$$

$$u(x,\ y,\ 0)=0,\quad u_t(x,\ y,\ 0)=Axy(l_1-x)(l_2-y),\quad 0<x<l_1,\quad 0<y<l_2 \tag{3}$$

es

$$u(x,\ y,\ t)=\frac{16Al_1^2l_2^2}{\pi^7 a}\times$$

$$\times\sum_{m,\ n=0}^{+\infty}\frac{\operatorname{sen}\frac{(2m+1)\pi x}{l_1}\operatorname{sen}\frac{(2n+1)\pi y}{l_2}}{(2m+1)^3(2n+1)^3}\frac{\operatorname{sen}\left\{\pi at\sqrt{\frac{(2m+1)^2}{l_1^2}+\frac{(2n+1)^2}{l_2^2}}\right\}}{\sqrt{\frac{(2m+1)^2}{l_1^2}+\frac{(2n+1)^2}{l_2^2}}}.$$

49. $u(x,\ y,\ t)=$

$$=\frac{4K}{\pi a\rho l_1 l_2}\sum_{m,\ n=1}^{+\infty}\frac{\operatorname{sen}\frac{m\pi x_0}{l_1}\operatorname{sen}\frac{m\pi x}{l_1}\operatorname{sen}\frac{n\pi y_0}{l_2}\operatorname{sen}\frac{n\pi y}{l_2}}{\sqrt{\frac{m^2}{l_1^2}+\frac{n^2}{l_2^2}}}\left\{\operatorname{sen}\pi at\sqrt{\frac{m^2}{l_1^2}+\frac{n^2}{l_2^2}}\right\}.$$

donde ρ es la densidad superficial de la masa.

Indicación. Se puede hallar primero la solución, suponiendo que el impulso K está uniformemente distribuido sobre los entornos $x_0-\varepsilon<x<x_0+\varepsilon$, $y_0-\varepsilon<y<y_0+\varepsilon$ del punto $(x_0,\ y_0)$, y después pasar al límite cuando $\varepsilon\to 0$*).

Se puede también utilizar la función δ impulsiva de Dirac y formular las condiciones iniciales del modo siguiente

$$u(x,\ y,\ 0)=0,\qquad u_t(x,\ y,\ 0)=\frac{K}{\rho}\,\delta(x-x_0)\,\delta(y-y_0),\quad 0<x<l_1;\quad 0<y<l_2.$$

El segundo procedimiento conduce mucho más rápidamente al fin. Utilizando las funciones δ, elegimos el multiplicador del producto de las funciones δ, de modo que el impulso total transmitido a la membrana sea igual al dado.

50. La solución del problema de contorno

$$u_{tt}=a^2\{u_{xx}+u_{yy}\}+A^{(0)}(x,\ y)\operatorname{sen}\omega t,\qquad A^{(0)}(x,\ y)=\frac{1}{\rho}A(x,\ y), \tag{1}$$

$$u|_{x=0}=u|_{x=l_1}=u|_{y=0}=u|_{y=l_2}=0, \tag{2}$$

$$u(x,\ y,\ 0)=0,\quad u_t(x,\ y,\ 0)=0,\quad 0<x<l_1,\quad 0<y<l_2, \tag{3}$$

es

$$u(x,\ y,\ t)=\sum_{m,n=1}^{+\infty}A_{mn}\left(\operatorname{sen}\omega t-\frac{\omega}{\omega_{mn}}\operatorname{sen}\omega_{mn}t\right)\operatorname{sen}\frac{m\pi x}{l_1}\operatorname{sen}\frac{n\pi y}{l_2}, \tag{4}$$

---

*) Véase la solución del problema 101 § 3 cap. II.

dondo

$$A_{mn}=\frac{4}{l_1 l_2 (\omega_{mn}^2-\omega^2)}\int_0^{l_1} dx \int_0^{l_2} A^{(0)}(x, y) \operatorname{sen}\frac{m\pi x}{l_1}\operatorname{sen}\frac{n\pi y}{l_2}\,dy, \qquad (5)$$

$$\omega_{mn}=\pi a\sqrt{\frac{m^2}{l_1^2}+\frac{n^2}{l_2^2}}, \qquad (6)$$

con la condición de que la frecuencia de la fuerza impulsante no coincida con ninguna de las frecuencias propias $\omega \neq \omega_{mn}$. Si $\omega=\omega_{m_0n_0}$ (¡la resonancia!), entonces

$$u(x, y, t)=\sum_{\substack{m, n=1\\ m\neq m_0,\\ n\neq n_0}}^{+\infty} A_{mn}\left(\operatorname{sen}\omega t-\frac{\omega}{\omega_{mn}}\operatorname{sen}\omega_{mn}t\right)\operatorname{sen}\frac{m\pi x}{l_1}\operatorname{sen}\frac{n\pi y}{l_2}+$$

$$+A_{m_0n_0}(\operatorname{sen}\omega t-\omega t\cos\omega t)\operatorname{sen}\frac{m_0\pi x}{l_1}\operatorname{sen}\frac{n_0\pi y}{l_2}, \qquad (7)$$

donde A_{mn} se determina según las fórmulas (5) y

$$A_{m_0n_0}=\frac{2}{l_1 l_2\omega}\int_0^{l_1} dx\int_0^{l_2} A^{(0)}(x, y)\operatorname{sen}\frac{m_0\pi x}{l_1}\operatorname{sen}\frac{n_0\pi y}{l_2}\,dy. \qquad (8)$$

Observación. Si la frecuencia de $\omega_{m_0n_0}$ es múltiple, es decir, corresponde al valor propio múltiple, entonces en vez de un término resonante aparecerá un grupo de ellos en la forma indicada.

51. Si la frecuencia de la fuerza impulsante no coincide con ninguna de las frecuencias propias de la membrana, es decir, $\omega \neq \omega_{mn}$, m, $n = 1, 2, 3, \ldots$, entonces

$$u(x, y, t)=\frac{4A}{\rho l_1 l_2}\sum_{m, n=1}^{+\infty}\frac{\operatorname{sen}\omega t-\frac{\omega}{\omega_{mn}}\operatorname{sen}\omega_{mn}t}{\omega_{mn}^2-\omega^2}\times$$

$$\times\operatorname{sen}\frac{m\pi x_0}{l_1}\operatorname{sen}\frac{n\pi y_0}{l_2}\operatorname{sen}\frac{m\pi x}{l_1}\operatorname{sen}\frac{n\pi y}{l_2}.$$

Si $\omega=\omega_{m_0n_0}$ (la resonancia), entonces

$$u(x, y, t)=\frac{4A}{\rho l_1 l^2}\times$$

$$\times\sum_{\substack{m, n=1\\ m\neq m_0,\ n\neq n_0}}^{+\infty}\frac{\operatorname{sen}\omega t-\frac{\omega}{\omega_{mn}}\operatorname{sen}\omega_{mn}t}{\omega_{mn}^2-\omega^2}\operatorname{sen}\frac{m\pi x_0}{l_1}\operatorname{sen}\frac{n\pi y_0}{l_2}\operatorname{sen}\frac{m\pi x}{l_1}\operatorname{sen}\frac{n\pi y}{l_2}+$$

$$+\frac{2A}{\rho l_1 l_2\omega}(\operatorname{sen}\omega t-\omega t\cos\omega t)\operatorname{sen}\frac{m_0\pi x_0}{l_1}\operatorname{sen}\frac{n_0\pi y_0}{l_2}\operatorname{sen}\frac{m_0\pi x}{l_1}\operatorname{sen}\frac{n_0\pi y}{l^2}.$$

Observación. Si la frecuencia $\omega_{m_0n_0}$ es múltiple, entonces en vez de un termino resonante aparecerá un grupo de términos resonantes de la forma indicada.

52. El potencial de las velocidades horizontales de las partículas del agua es la solución del problema de contorno

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = a^2 \left\{\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2}\right\} + \frac{A}{\rho}\cos\frac{\pi x}{l_1}\cos\frac{\pi y}{l_2} f'(t),$$

$$0 < t < +\infty, \quad a^2 = gh, \quad (1)$$

$$\left.\frac{\partial U}{\partial x}\right|_{x=0} = \left.\frac{\partial U}{\partial x}\right|_{x=l_1} = \left.\frac{\partial U}{\partial y}\right|_{y=0} = \left.\frac{\partial U}{\partial y}\right|_{y=l_2} = 0, \quad (2)$$

$$U(x, y, 0) = 0, \quad U_t(x, y, 0) = 0. \quad (3)$$

El puede ser representado en la forma

$$U(x, y, t) = \frac{A}{k_0\rho}\left\{\int_0^t f'(\tau)\operatorname{sen} k(t-\tau)\,d\tau\right\}\cos\frac{\pi x}{l_1}\cos\frac{\pi y}{l_2}. \quad (4)$$

53. $u(x, y, t) =$

$$= \frac{4K}{\rho l_1 l_2} e^{-\nu^2 t}\sum_{m,\,n=1}^{+\infty}\frac{\operatorname{sen}\frac{m\pi x_0}{l_1}\operatorname{sen}\frac{n\pi y_0}{l_2}\operatorname{sen}\frac{m\pi x}{l_1}\operatorname{sen}\frac{n\pi y}{l_2}}{\widetilde{\omega}_{mn}}\operatorname{sen}\widetilde{\omega}_{mn}t,$$

donde

$$\widetilde{\omega}_{mn}^2 = \pi^2 a^2\left(\frac{m^2}{l_1^2} - \frac{n^2}{l_2^2}\right) - \nu^4,$$

y ν^2 es el coeficiente de la resistencia que entra en la ecuación

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\left\{\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right\} - 2\nu^2\frac{\partial u}{\partial t}.$$

54. $u(x, y, t) =$

$$= -\frac{16A}{\pi^2\rho}\sum_{m,\,n=1}^{+\infty}\frac{(\omega^2-\omega_{mn}^2)\operatorname{sen}\omega t + 2\nu^2\omega\cos\omega t}{(2m+1)(2n+1)\left[(\omega^2-\omega_{mn}^2)^2 + 4\omega^2\nu^4\right]}\operatorname{sen}\frac{m\pi x}{l_1}\operatorname{sen}\frac{n\pi y}{l_2},$$

$$\omega_{mn} = \pi a\sqrt{\frac{m^2}{l_1^2} + \frac{n^2}{l_2^2}}.$$

Indicación. Buscamos la solución de la ecuación

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = a^2\left\{\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2}\right\} - 2\nu^2\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{A}{\rho}e^{i\omega t},$$

que se anula para $x=0$, $x=l_1$, $y=0$, $y=l_2$, en la forma

$$U(x, y, t) = V(x, y)\,e^{i\omega t};$$

entonces $u(x, y, t) = \operatorname{Im}(U(x, y, t))$. Para determinar $V(x, y)$ obtenemos el problema de contorno

$$\Delta V + \frac{\omega^2 - 2\nu^2\omega i}{a^2}V = -\frac{A}{\rho a^2},$$

$$V|_{x=0} = V|_{x=l_1} = V|_{y=0} = V|_{y=l_2} = 0.$$

Su solución la buscamos en la forma

$$V(x, y) = \sum_{m, n=1}^{+\infty} A_{mn} \operatorname{sen} \frac{m\pi x}{l_1} \operatorname{sen} \frac{n\pi y}{l_2}.$$

55. La solución del problema de contorno

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = a^2 \left(\frac{\partial^2 U_t}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial U}{\partial r} \right), \quad r_1 < r < r_2, \quad 0 < t < +\infty,$$

$$\left.\frac{\partial U}{\partial r}\right|_{r=r_1} = \varepsilon\omega \cos \omega t, \left.\frac{\partial U}{\partial r}\right|_{r=r_2} = 0, \quad 0 < t < +\infty$$

($U(r, t)$ es el potencial de las velocidades de las partículas del gas) que representa las oscilaciones armónicas estables con la frecuencia ω es

$$U(r, t) =$$

$$= \left\{ \frac{\varepsilon\omega r_1 \left(\frac{\omega}{a} \cos \frac{\omega}{a} r_2 - \frac{1}{r_2} \operatorname{sen} \frac{\omega}{a} r_2 \right)}{\left(\left(\frac{\omega}{a} \right)^2 + \frac{1}{r_1 r_2} \right) \operatorname{sen} \frac{\omega}{a} (r_1 - r_2) + \left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1} \right) \cos \frac{\omega}{a} (r_2 - r_1)} \cdot \frac{\cos \frac{\omega}{a} r}{r} + \right.$$

$$\left. + \frac{2a\varepsilon \left(\frac{\omega}{a} \operatorname{sen} \frac{\omega}{a} r_2 + \frac{1}{r_2} \cos \frac{\omega}{a} r_2 \right)}{\left(\left(\frac{\omega}{a} \right)^2 + \frac{1}{r_1 r_2} \right) \operatorname{sen} \frac{\omega}{a} (r_1 - r_2) + \left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1} \right) \cos \frac{\omega}{a} (r_2 - r_1)} \cdot \frac{\operatorname{sen} \frac{\omega}{a} r}{r} \right\} \cos \omega t.$$

Indicación. Buscar la solución en la forma

$$U(r, t) = R(r) \cos \omega t.$$

56. La solución del problema de contorno *)

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = a^2 \left(\frac{\partial^2 U}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial U}{\partial r} \right), \quad r_1 < r < r_2, \quad 0 < t < +\infty, \tag{1}$$

$$\left.\frac{\partial U}{\partial r}\right|_{r=r_1} = 0, \quad \left.\frac{\partial U}{\partial r}\right|_{r=r_2} = 0, \quad 0 < t < +\infty, \tag{2}$$

$$U(r, 0) = 0, \quad U_t(r, 0) = -\frac{a^2}{\rho_0} f(r), \quad r_1 < r < r_2, \tag{3}$$

es

$$U(r, t) = \sum_{n=1}^{+\infty} A_n \frac{\cos \lambda_n r + \gamma_n \operatorname{sen} \lambda_n r}{r} \operatorname{sen} a\lambda_n t,$$

donde λ_n son las raíces de la ecuación transcendente

$$\operatorname{tg} \lambda = r_2 - r_1 = \frac{\lambda\, 1/r_1 - 1/r_2}{\lambda^2 + \frac{1}{r_1 r_2}}.$$

$$\gamma_n = \frac{\lambda_n \operatorname{sen} \lambda_n r_2 + \frac{1}{r_2} \cos \lambda_n r_2}{\lambda_n \cos \lambda_n r_2 - \frac{1}{r_2} \operatorname{sen} \lambda_n r_2},$$

$$A_n = -\frac{a^2}{\rho_0} \int_{r_1}^{r_2} r f(r) [\cos \lambda_n r + \gamma_n \operatorname{sen} \lambda_n r]\, dr.$$

*) $U(r, t)$ es el potencial de las velocidades de las partículas del gas

Indicación. Pasar a la nueva función incógnita

$$V(r,\ t)=rU(r,\ t).$$

b) *Medios heterogéneos*

57. La solución del problema de contorno

$$\left.\begin{array}{l}\rho_1\dfrac{\partial^2 u_1}{\partial t^2}=T_0\left\{\dfrac{\partial^2 u_1}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u_1}{\partial y^2}\right\},\\ 0\leqslant x\leqslant x_0,\quad 0\leqslant y\leqslant l_2,\\ \rho_2\dfrac{\partial^2 u_2}{\partial t^2}=T_0\left\{\dfrac{\partial^2 u_2}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u_2}{\partial y^2}\right\},\\ x_0\leqslant x\leqslant l_1,\quad 0\leqslant y\leqslant l_2,\end{array}\right\} 0<t<+\infty \tag{1}$$

$$\left.\begin{array}{l}u(x_0-0,\ y,\ t)=u(x_0+0,\ y,\ t),\\ u_x(x_0-0,\ y,\ t)=u_x(x_0+0,\ y,\ t),\end{array}\right\}\ 0\leqslant y\leqslant l_2,\quad 0<t<+\infty, \tag{2}$$

$$u|_{x=0}=u|_{x=l_1}=u|_{y=0}=u|_{y=l_2}=0,$$

$$u(x,\ y,\ 0)=f(x,\ y),\quad u_t(x,\ y,\ 0)=F(x,\ y),\quad 0\leqslant x\leqslant l_1,\quad 0\leqslant y\leqslant l_2, \tag{3}$$

es

$$u(x,\ y,\ t)=\sum_{m,\ n=1}^{+\infty}(A_{mn}\cos\lambda_{mn}t+B_{mn}\operatorname{sen}\lambda_{mn}t)\,v_{mn}(x,\ y), \tag{4}$$

donde

$$v_{mn}(x,\ y)=\left\{\begin{array}{l}\dfrac{\operatorname{sen}\overline{\omega}_{mn}x}{\operatorname{sen}\overline{\omega}_{mn}x_0}\operatorname{sen}\dfrac{n\pi y}{l_2},\quad 0\leqslant x\leqslant x_0,\quad 0\leqslant y\leqslant l_2\\ \dfrac{\operatorname{sen}\overline{\overline{\omega}}_{mn}(l_1-x)}{\operatorname{sen}\overline{\overline{\omega}}_{mn}(l_1-x_0)}\operatorname{sen}\dfrac{n\pi y}{l_2},\quad x_0\leqslant x\leqslant l_1\quad 0\leqslant y\leqslant l_2,\end{array}\right\} \tag{5}$$

$$\overline{\omega}_{m}^{2}=\frac{\rho_1}{T_0}\lambda_{mn}^2-\frac{n^2\pi^2}{l_2^2},\ \overline{\overline{\omega}}_{mn}^{2}=\frac{\rho^2}{T_0}\lambda_{mn}^2-\frac{n^2\pi^2}{l_2^2}, \tag{6}$$

donde λ_{mn} $(m,\ n=1,\ 2,\ 3,\ \ldots)$ son las raíces de la ecuación trascedente

$$\sqrt{\frac{\rho_1}{T_0}\lambda_{mn}^2-\frac{n^2\pi^2}{l_2^2}}\operatorname{ctg}\left\{x_0\sqrt{\frac{\rho_1}{T_0}\lambda_{mn}^2-\frac{n^2\pi^2}{l_2^2}}\right\}=$$
$$=\sqrt{\frac{\rho^2}{T_0}\lambda_{mn}^2-\frac{n^2\pi^2}{l_2^2}}\operatorname{ctg}\left\{(x_0-l_1)\sqrt{\frac{\rho^2}{T_0}\lambda_{mn}^2-\frac{n^2\pi^2}{l_2^2}}\right\}, \tag{7}$$

$$A_{mn}=\frac{\int\limits_0^{l_1}\int\limits_0^{l_2}\mu(x,\ y)\,f(x,\ y)\,v_{mn}(x,\ y)\,dx\,dy}{\|v_{mn}\|^2}, \tag{8}$$

$$B_{mn}=\frac{\int\limits_0^{l_1}\int\limits_0^{l_2}\mu(x,\ y)\,F(x,\ y)\,v_{mn}(x,\ y)\,dx\,dy}{\lambda_{mn}\|v_{mn}\|^2}, \tag{9}$$

$$\mu(x,\ y)=\left\{\begin{array}{lll}\rho_1, & 0\leqslant x<x_0, & 0\leqslant y\leqslant l_2,\\ \rho_2, & x_0<x\leqslant l_1, & 0\leqslant y\leqslant l_2,\end{array}\right\} \tag{10}$$

$$\|v_{mn}\|^2=\int_0^{l_1}\int_0^{l_2}\mu(x,\ y)\,v_{mn}^2(x,\ y)\,dx\,dy=$$

$$=\frac{l_2}{4}\left\{\frac{\rho_1 x_0}{\operatorname{sen}^2\overline{\omega}_{mn}x_0}+\frac{\rho_2(l_1-x_0)}{\operatorname{sen}^2\overline{\overline{\omega}}_{mn}(l_1-x_0)}\right\}. \quad (11)$$

58. La solución del problema de contorno

$$\left.\begin{aligned}\rho_{01}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}&=K_1p_0\left\{\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+\frac{2}{r}\frac{\partial u}{\partial r}\right\}, \quad 0\leqslant r\leqslant r_1, \quad 0<t<+\infty,\\ \rho_{02}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}&=K_2p_0\left\{\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+\frac{2}{r}\frac{\partial u}{\partial r}\right\}, \quad r_1<r<r_2,\end{aligned}\right\} \quad (1)$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial r}\right|_{r=r_0}=0, \quad \rho_{01}u\,|_{r=r_1-0}=\rho_{02}u\,|_{r=r_1+0},$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial r}\right|_{r=r_1-0}=\left.\frac{\partial u}{\partial r}\right|_{r=r_1+0}, \quad 0<t<+\infty, \quad (2)$$

$$u(r,\ 0)=f(r), \quad u_t(r,\ 0)=0, \quad 0\leqslant r\leqslant r_2, \quad (3)$$

es

$$u(r,\ t)=\sum_{n=1}^{+\infty}A_n\frac{v_n(r)}{r}\cos\lambda_n t, \quad 0\leqslant r<r_2, \quad 0<t<+\infty, \quad (4)$$

donde λ_n $(n=1,\ 2,\ 3,\ \ldots)$ son las raíces de la ecuación trascedente

$$\begin{vmatrix}\rho_{01}\operatorname{sen}\frac{\lambda r_1}{a_1} & -\rho_{02}\cos\frac{\lambda}{a_2}r_1 & -\rho_{02}\operatorname{sen}\frac{\lambda}{a_2}r_1\\ \frac{\lambda}{a_1}\cos\frac{\lambda}{a_1}r_1-\frac{1}{r_1}\operatorname{sen}\frac{\lambda}{a_1}r_1 & \frac{\lambda}{a_2}\operatorname{sen}\frac{\lambda}{a_2}r_1+\frac{1}{r_1}\cos\frac{\lambda}{a_2}r_1 & -\frac{\lambda}{a^2}\cos\frac{\lambda}{a_2}r_1+\frac{1}{r_1}\operatorname{sen}\frac{\lambda}{a_2}r_1\\ & \frac{\lambda}{a_2}\operatorname{sen}\frac{\lambda}{a_2}r_2+\frac{1}{r_2}\cos\frac{\lambda}{a_2}r_2 & -\frac{\lambda}{a_2}\cos\frac{\lambda}{a_2}r_2+\frac{1}{r_2}\operatorname{sen}\frac{\lambda}{a_2}r_2\end{vmatrix}=0, \quad (5)$$

$$v_n(r)=\left\{\begin{aligned}&\alpha_n\operatorname{sen}\frac{\lambda_n}{a_1}r, && 0\leqslant r\leqslant r_1,\\ &\beta_n\cos\frac{\lambda_n}{a_2}r+\gamma_n\operatorname{sen}\frac{\lambda_n}{a_2}r, && r_1\leqslant r\leqslant r_2.\end{aligned}\right\} \quad (6)$$

Las constantes α_n, β_n y γ_n se determinan con exactitud hasta el factor constante común del sistema de ecuaciones

$$\left.\begin{aligned}&\left(\rho_{01}\operatorname{sen}\frac{\lambda_n}{a_1}r_1\right)\alpha_n-\left(\rho_{02}\cos\frac{\lambda_n}{a_2}r_1\right)\beta_n-\left(\rho_{02}\operatorname{sen}\frac{\lambda_n}{a_2}r_1\right)\gamma_n=0,\\ &\left(\frac{\lambda_n}{a_1}\cos\frac{\lambda_n}{a_1}r_1-\frac{1}{r_1}\operatorname{sen}\frac{\lambda_n}{a_1}r_1\right)\alpha_n+\left(\frac{\lambda_n}{a_2}\operatorname{sen}\frac{\lambda_n}{a_2}r_1+\right.\\ &\left.+\frac{1}{r_1}\cos\frac{\lambda_n}{a_2}r_1\right)\beta_n+\left(-\frac{\lambda_n}{a_2}\cos\frac{\lambda_n}{a_2}r_1+\frac{1}{r_1}\operatorname{sen}\frac{\lambda_n}{a_2}r_1\right)\gamma_n=0,\\ &\left(\frac{1}{r_2}\cos\frac{\lambda_n}{a_2}r_2+\frac{\lambda_n}{a_2}\operatorname{sen}\frac{\lambda_n}{a_2}r_2\right)\beta_n+\\ &\qquad+\left(\frac{1}{r_2}\operatorname{sen}\frac{\lambda_n}{a_2}r_2-\frac{\lambda_n}{a_2}\cos\frac{\lambda_n}{a_2}r_2\right)\gamma_n=0,\end{aligned}\right\} \quad (7)$$

$$A_n = \frac{\int\limits_0^{r_2} r\mu(r) f(r) v_n(r)\, dr}{\| v_n \|^2}, \quad n = 1, 2, 3, \ldots, \tag{8}$$

$$\mu(r) = \left\{ \begin{array}{ll} \dfrac{\rho_{01}}{k_1 p_0}, & 0 \leqslant r < r_1, \\ \dfrac{\rho_{02}}{k_2 p_0}, & r_1 < r \leqslant r_2, \end{array} \right\} \tag{9}$$

$$\| v_n \|^2 = \int\limits_0^{r_2} \mu(r) v_n^2(r)\, dr. \tag{10}$$

2. Problemas de contorno que requieren la utilización de las funciones especiales

a) Medios homogéneos

59. La solución del problema de contorno

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} \right), \quad 0 \leqslant r < r_0, \quad 0 < t < +\infty, \tag{1}$$

$$u(r_0, t) = 0, \quad 0 < t < +\infty, \tag{2}$$

$$u(r, 0) = \varphi(r), \quad u_t(r, 0) = \psi(r), \quad 0 < r < r_0, \tag{3}$$

es

$$u(r, t) = \sum_{n=1}^{+\infty} \left\{ A_n \cos\left(a \frac{\mu_n}{r_0} t \right) + B_n \operatorname{sen}\left(a \frac{\mu_n}{r_0} t \right) \right\} J_0\left(\frac{\mu_n r}{r_0} \right), \tag{4}$$

donde

$$\left. \begin{array}{l} A_n = \dfrac{2}{r_0^2 [J_1(\mu_n)]^2} \displaystyle\int\limits_0^{r_0} r\varphi(r) J_0\left(\frac{\mu_n r}{r_0} \right) dr, \\ B_n = \dfrac{2}{a\mu_n r_0 [J_1(\mu_n)]^2} \displaystyle\int\limits_0^{r_0} r\psi(r) J_0\left(\frac{\mu_n r}{r_0} \right) dr, \end{array} \right\} \tag{5}$$

μ_n son las raíces positivas de la ecuación $J_0(\mu) = 0$.

60. La solución del problema de contorno

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \left\{ \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} \right\}, \quad 0 \leqslant r < r_0, \quad 0 < t < +\infty, \tag{1}$$

$$u(r_0, t) = 0, \tag{2}$$

$$u(r, 0) = A \left(1 - \frac{r^2}{r_0^2} \right), \quad u_t(r, 0) = 0, \quad 0 \leqslant r \leqslant r_0, \tag{3}$$

es

$$u(r,\ t)=8A\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{J_0\left(\frac{\mu_n r}{r_0}\right)}{\mu_n^2 J_1(\mu_n)}\cos\frac{a\mu_n t}{r_0}, \tag{4}$$

μ_n son las raíces positivas de la ecuación $J_0(\mu)=0$.

Indicación. Para calcular los coeficientes de la serie (4) utilizar la fórmula $\int\limits_0^x xJ_0(x)\,dx=xJ_1(x)$; establecer primero la validez de la fórmula

$$\int\limits_0^x x^2J_0(x)\,dx=2x^2J_0(x)+(x^3-4x)J_1(x). \tag{5}$$

61. El potencial de las velocidades horizontales de las partículas del agua es la solución del problema de contorno

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2}=a^2\left\{\frac{\partial^2 U}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\ \frac{\partial U}{\partial r}\right\},\quad 0\leqslant r\leqslant r_0,\quad 0<t<+\infty, \tag{1}$$

$$|U(0,\ t)|<+\infty,\ \frac{\partial U(r_0,\ t)}{\partial r}=0,\quad 0<t<+\infty, \tag{2}$$

$$U(r,\ 0)=\varphi(r),\quad U_t(r,\ 0)=\psi(r),\quad 0\leqslant r\leqslant r_0. \tag{3}$$

Para él obtenemos la representación

$$U(r,\ t)=\frac{2}{r_0^2}\int\limits_0^{r_0} r\{\varphi(r)+t\psi(r)\}\,dr+$$
$$+\sum_{n=1}^{+\infty}\left(A_n\cos\frac{a\mu_n t}{r_0}+B_n\operatorname{sen}\frac{a\mu_n t}{r_0}\right)J_0\left(\frac{\mu_n r}{r_0}\right), \tag{4}$$

donde

$$\left.\begin{aligned}A_n&=\frac{2}{r_0^2[J_0(\mu_n)]^2}\int\limits_0^{r_0} r\varphi(r)\,J_0\left(\frac{\mu_n r}{r_0}\right)dr,\\ B_n&=\frac{2}{a\mu_n r_0[J_0(\mu_n)]^2}\int\limits_0^{r_0} r\psi(r)\,J_0\left(\frac{\mu_n r}{r_0}\right)dr,\end{aligned}\right\} \tag{5}$$

μ_n son las raíces positivas de la ecuación $J_1(\mu)=0$.

62. La solución del problema de contorno

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\left\{\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\ \frac{\partial u}{\partial r}\right\}+\frac{p_0}{\rho},\quad 0\leqslant r\leqslant r_0,\quad 0<t<+\infty, \tag{1}$$

$$u(r_0,\ t)=0,\quad 0<t<+\infty, \tag{2}$$

$$u(r,\ 0)=0,\quad u_t(r,\ 0)=0,\quad 0\leqslant r\leqslant r_0, \tag{3}$$

es

$$u(r, t)=\frac{p_0}{\rho a^2}\left\{\frac{r_0^2-r^2}{4}-2r_0^2\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{J_0\left(\frac{\mu_k r}{r_0}\right)}{\mu_k^2 J_1(\mu_k)}\cos\frac{a\mu_k t}{r_0}\right\}, \qquad (4)$$

donde μ_k son las raíces positivas de la ecuación $J_0(\mu)=0$, ρ, la densidad superficial de la membrana.

63. La solución del problema de contorno

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\left\{\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r}\right\}+\frac{1}{\rho}f(r, t), \quad 0\leqslant r<r_0, \quad 0<t<+\infty, \qquad (1)$$

$$u(r_0, t)=0, \quad 0<t<+\infty, \qquad (2)$$

$$u(r, 0)=0, \quad u_t(r, 0)=0, \quad 0\leqslant r<r_0, \qquad (3)$$

es

$$u(r, t)=\sum_{n=1}^{+\infty}A_n(t)J_0\left(\frac{\mu_n r}{r_0}\right),$$

$$A_n(t)=\frac{1}{\omega_n}\int_0^t d\tau\int_0^{r_0}f(\xi, \tau)J_0\left(\frac{\mu_n\xi}{r_0}\right)\operatorname{sen}\omega_n(t-\tau)\,d\xi, \qquad (4)$$

donde $\omega_n=\frac{a\mu_n}{r_0}$ y μ_n son las raíces de la ecuación $J_0(\mu)=0$.

64. La solución del problema de contorno

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\left\{\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r}\right\}+\frac{p_0}{\rho}\operatorname{sen}\omega t, \quad 0\leqslant r<r_0, \quad 0<t<+\infty, \qquad (1)$$

$$u(r_0, t)=0, \quad 0<t<+\infty, \qquad (2)$$

$$u(r, 0)=0, \quad u_t(r, 0)=0, \quad 0\leqslant r\leqslant r_0, \qquad (3)$$

es

$$u(r, t)=\frac{p_0}{\omega^2\rho}\left\{\frac{J_0\left(\frac{\omega r}{a}\right)}{J_0\left(\frac{\omega r_0}{a}\right)}-1\right\}\operatorname{sen}\omega t+\frac{2p_0\omega r_0^3}{a\rho}\times$$

$$\times\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{J_0\left(\frac{\mu_n r}{r_0}\right)\operatorname{sen}\frac{a\mu_n t}{r_0}}{\mu_n^2(\omega^2 r_0^2-a^2\mu_n^2)J_1(\mu_n)}, \qquad (4)$$

donde μ_n son las raíces positivas de la ecuación $J_0(\mu)=0$ si sólo la frecuencia ω de la fuerza impulsante no coincide con ninguna de las frecuencias propias de la membrana $\omega_n=\frac{a\mu_n}{r_0}$ (no hay resonancia). En el caso de la resonancia la solución se halla análogamente a como se hizo en la solución del problema 133, § 3, cap. II.

65. $u(r, t)=A\frac{J_0\left(\frac{\omega r}{a}\right)}{J_0\left(\frac{\omega r_0}{a}\right)}\operatorname{sen}\omega t-\sum_{n=1}^{+\infty}A_n J_0\left(\frac{\mu_n r}{r_0}\right)\operatorname{sen}\frac{a\mu_n t}{r_0}$,

donde

$$A_n = \frac{2A\omega}{a\mu_n r_0 J_0\left(\frac{\omega r_0}{a}\right)[J_1(\mu_n)]^2}\int_0^{r_0} rJ_0\left(\frac{\omega r}{a}\right) J_0\left(\frac{\mu_n r}{r_0}\right) dr,$$

μ_n son las raíces de la ecuación $J_0(\mu) = 0$.

Indicación. Primero se deben hallar las vibraciones forzadas con la frecuencia de la fuerza impulsante en la forma $U(r, t) = R(r)$ sen ωt.

Observación. La solución está escrita en el supuesto que no hay resonancia, es decir, que $\omega \neq \omega_n = \frac{a\mu_n}{r_0}$, $n = 1, 2, 3, \ldots$

66. La solución del problema de contorno

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r}\right) - 2\nu^2\frac{\partial u}{\partial t}, \quad 0 \leqslant r < r_0, \quad 0 < t < +\infty, \tag{1}$$

$$u(r_0, t) = 0, \quad 0 < t < +\infty, \tag{2}$$

$$u(r, 0) = \varphi(r), \quad u_t(r, 0) = \psi(r), \quad 0 < r < r_0, \tag{3}$$

es

$$u(r, t) \sum_{n=1}^{+\infty} e^{-\nu^2 t}\{A_n \cos\tilde{\omega}_n t + B_n \operatorname{sen}\tilde{\omega}_n t\} \times J_0\left(\frac{\mu_n r}{r_0}\right), \tag{4}$$

donde

$$A_n = \frac{2}{r_0^2[J_1(\mu_n)]^2}\int_0^{r_0} r\varphi(r) J_0\left(\frac{\mu_n r}{r_0}\right) dr, \tag{5}$$

$$B_n = \frac{\nu^2}{\tilde{\omega}_n} A_n + \frac{2}{\tilde{\omega}_n r_0^2[J_1(\mu_n)]^2}\int_0^{r_0} r\psi(r) J_0\left(\frac{\mu_n r}{r_0}\right) dr, \tag{6}$$

μ_n son las raíces positivas de la ecuación $J_n(\mu) = 0$,

$$\tilde{\omega}_n = \sqrt{\frac{a^2\mu_n^2}{r_0^2} - \nu^4}\text{*)}.$$

67. a) $$u(r, t) = 2\frac{p_0}{\rho} r_0^2 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{J_0\left(\frac{\mu_n r}{r_0}\right)}{\mu_n J_1(\mu_n)} \times$$

$$\times \frac{(a^2\mu_n^2 - r_0^2\omega^2)\operatorname{sen}\omega t - 2\nu^2\omega\cos\omega t}{(a^2\mu_n^2 - r_0^2\omega^2)^2 + 4\nu^4\omega^2},$$

---

*) Suponemos que $\tilde{\omega}_n$ son reales para $n = 1, 2, 3, \ldots$; si para $n = 1, 2, 3, \ldots$ $\tilde{\omega}_n$ son imaginarios en los términos correspondientes, cos y sen se sustituyen por ch y sh y el signo delante del primer sumando en la fórmula (6) se cambia por el opuesto.

b) $$u(r, t) = 2\frac{p_0}{\rho} r_0^2 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{J_0\left(\frac{\mu_n r}{r_0}\right)}{\mu_n J_1(\mu_n)} \times$$

$$\times \frac{(a^2\mu_n^2 - r_0^2\omega^2)\cos\omega t + 2\nu^2\omega \operatorname{sen}\omega t}{(a^2\mu_n^2 - r_0^2\omega^2)^2 + 4\nu^4\omega^2},$$

donde μ_n son las raíces positivas de la ecuación $J_0(\mu) = 0$.

Indicación. Véase la indicación al problema 50.

68. Se debe hallar la solución de la ecuación

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = a^2 \left\{\frac{\partial^2 U}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial U}{\partial r}\right\} - 2\nu^2 \frac{\partial U}{\partial t},$$

que satisface las condiciones de frontera

$$|U(0, t)| < +\infty, \quad U(r_0, t) = Ae^{i\omega t},$$

y después tomar su parte imaginaria. Para este fin nos liberamos de la heterogeneidad en la condición de frontera, pasándola al segundo miembro de la ecuación diferencial; precisamente, buscaremos la solución del problema en la forma

$$U(r, t) = v(r, t) + A\frac{r^2}{r_0^2}e^{i\omega t},$$

donde

$$v(r, t) = R(r)e^{i\omega t}, \quad |R(0)| < +\infty, \quad R(r_0) = 0. \tag{1}$$

Para $R(r)$ obtenemos la ecuación diferencial

$$\frac{d^2R}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{dR}{dr} + \frac{\omega^2 - 2\nu^2\omega i}{a^2}R = -A\left\{\left(\frac{\omega^2 r^2}{a^2 r_0^2} + \frac{4}{r_0^2}\right) - \frac{2\omega r^2}{r_0^2}\frac{\nu^2}{a^2}i\right\},$$

cuya solución que satisfaga las condiciones de frontera (1) la buscamos en la forma

$$R(r) = \sum_{n=1}^{+\infty} A_n J_0\left(\frac{\mu_n r}{r_0}\right),$$

donde μ_n son las raíces positivas de la ecuación $J_0(\mu) = 0$.

69. La solución del problema de contorno

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a_1^2\left\{\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r}\right\} - \alpha^2 \int_0^{r_0} ru(r, t)\,dr,$$

$$0 < r < r_0, \quad 0 < t < +\infty, \quad \alpha^2 = \frac{2\pi\rho_0 a_0^2}{\Omega_0\rho_1}, \tag{1}$$

$$u(r_0, t) = 0, \quad 0 < t < +\infty, \tag{2}$$

$$u(r, 0) = \varphi(r), \quad u_t(r, 0) = \psi(r), \quad 0 < r < r_0, \tag{3}$$

es

$$u(r, t)=\sum_{n=1}^{+\infty}\left\{A_n \cos\frac{a_1\mu_n t}{r_0}+B_n \operatorname{sen}\frac{a_1\mu_n t}{r_0}\right\}\left\{J_0\left(\mu_n\frac{r}{r_0}\right)-J_0(\mu_n)\right\}, \quad (4)$$

donde μ_n son las raíces positivas de la ecuación

$$J_0(\mu)+\varkappa J_2(\mu)=0, \quad \varkappa=\frac{\pi\rho_0 a_0^2}{\Omega_0\rho_1 a_0^2}r_0^2,^{*)} \quad (5)$$

$$A_n=\frac{2}{r_0^2\left[J_1^2(\mu_n)+\frac{2\varkappa}{\mu_n^2}J_2^2(\mu_n)\right]}\int_0^{r_0} r\varphi(r)\left[J_0\left(\mu_n\frac{r}{r_0}\right)-J_0(\mu_n)\right]dr,$$

$$B_n=\frac{2}{a_1\mu_n r_0\left[J_1^2(\mu_n)+\frac{2\varkappa}{\mu_n^2}J_2^2(\mu_n)\right]}\int_0^{r_0} r\psi(r)\left[J_0\left(\mu_n\frac{r}{r_0}\right)-J_0(\mu_n)\right]dr.$$

Indicación. Las soluciones particulares de la ecuación

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a_1^2\left\{\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r}\right\}-\frac{\rho_0 a_0^2}{\rho_1\Omega_0}\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^{r_0} ru(r, t)\,dr,$$

que satisfacen las condiciones

$$|u(0, t)|<+\infty, \quad u(r_0, t)=0,$$

las buscamos en la forma

$$U(r, t)=R(r)\,T(t).$$

Después de la separación de variables eso conduce a las ecuaciones

$$T''+a_1^2\lambda^2 T=0, \quad \frac{d^2R}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{dR}{dr}+\lambda^2 R=2\pi\frac{\rho_0 a_0^2}{\rho_1 a_1^2}\times\frac{1}{\Omega_0}\int_0^{r_0} rR(r)\,dr.$$

Antes de buscar la solución de la última ecuación que satisface las condiciones

$$|R(0)|<+\infty, \quad R(r_0)=0, \quad (1')$$

realizamos en esta ecuación la sustitución de variables: $\lambda r=x$, $R(r)=R\left(\frac{x}{\lambda}\right)=$ $=y(x)$; esto conducirá a la ecuación

$$y''+\frac{1}{x}y'+y(x)=\frac{2\pi\rho_0 a_0^2 r_0^2}{\Omega_0\rho_1 a_1^2\mu^2}\int_0^{\mu} xy(x)\,dx. \quad (2')$$

donde $\mu=\lambda r_0$.

Con esto las condiciones (1) tomarán la forma

$$|y(0)|<+\infty, \quad y(\mu)=0. \quad (3')$$

---

*) Sobre las notaciones véase el problema 5.

La solución de la ecuación (2') que satisface las condiciones de frontera (3') la buscamos en la forma

$$y(x) = J_0(x) - J_0(\mu). \qquad (4')$$

La sustitución de (4') en (2') da

$$-J_0(\mu) = \frac{2\pi}{\Omega_0}\frac{\rho_0 a_0^2}{\rho_1 a_1^2}\frac{r_0^2}{\mu^2}\int_0^{\mu} x\{J_0(x) - J_0(\mu)\}\,dx, \qquad (5')$$

que conduce a la ecuación siguiente para determinar los valores μ que corresponden a los valores propios $\lambda = \frac{\mu}{r_0}$ del problema de contorno en examen

$$J_0(\mu) + \varkappa J_2(\mu) = 0^{*)}, \qquad (6)$$

donde

$$\varkappa = \pi\frac{\rho_0 a_0^2}{\rho_1 a_1^2}\frac{r_0^2}{\Omega_0}.$$

Tomando

$$R_n(r) = J_0\left(\frac{\mu_n r}{r_0}\right) - J_0(\mu_n),$$

donde μ_n son las raíces positivas de la ecuación trascedente (6), no es difícil establecer las relaciones siguientes de ortogonalidad**) para las funciones propias $R_n(r)$ del problema de contorno en examen

$$\int_0^{r_0} rR_n(r)R_m(r)\,dr = \begin{cases} \frac{r_0^2}{2}\left[J_1^2(\mu_n) + \frac{2\varkappa}{\mu_n^2}J_2^2(\mu_n)\right] & \text{para } m = n, \\ 0 & \text{para } m \neq n. \end{cases} \qquad (7)$$

70. $$u(r, t) = \frac{\frac{\Pi_0}{T_0}\left\{J_0\left(\frac{\omega r_0}{a_1}\right) - J_0\left(\frac{\omega r}{a_1}\right)\right\}}{\varkappa J_2\left(\frac{\omega r_0}{a_1}\right) + \frac{\omega^2}{a_1^2}J_0\left(\frac{\omega r_0}{a_1}\right)}\operatorname{sen}\omega t + \sum_{n=1}^{+\infty} A_n R_n(r)\operatorname{sen}\frac{a_1\mu_n t}{r_0}, \qquad (1)$$

donde $\varkappa$ y $R_n(r)$ tienen el mismo sentido que en el problema anterior,

$$A_n = \frac{2}{a\mu_n r_0\left[J_1^2(\mu_n) + \frac{2\varkappa}{\mu_n^2}J_2^2(\mu_n)\right]}\int_0^{r_0} r\psi(r)R_n(r)\,dr, \qquad (2)$$

donde

$$\psi(r) = \frac{\frac{\Pi_0}{T_0}\left\{J_0\left(\frac{\omega r_0}{a_1}\right) - J_0\left(\frac{\omega r}{a_1}\right)\right\}}{\varkappa J_2\left(\frac{\omega r_0}{a_1}\right) + \frac{\omega^2}{a_1^2}J_0\left(\frac{\omega r_0}{a_1}\right)}, \qquad (3)$$

T_0 es la tensión de la membrana.

---

*) Para eso, después de realizar la integración en el segundo miembro de (5) mediante la relación (20), pág. 715 [7], se debe utilizar la primera de las relaciones (21), pág. 715 [7], haciendo $\nu = 1$.

**) Véase [38].

Indicación. Véase la indicación al problema anterior.

71. La solución del problema de contorno

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}+c^4\Delta_2\Delta_2 u=0, \quad 0\leqslant r<r_0, \quad 0<t<+\infty, \tag{1}$$

$$u(r_0, t)=u_r(r_0, t)=0, \quad 0<t<+\infty, \tag{2}$$

$$u(r, 0)=f(r), \quad u_t(r, 0)=F(r), \quad 0\leqslant r<r_0, \tag{3}$$

la buscamos mediante el método de separación de variables. Observemos que en condiciones de la simetría radial

$$\Delta_2=\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}, \tag{4}$$

a las soluciones particulares de la ecuación (2) las buscamos en la forma

$$U(r, t)=R(r)\,T(t). \tag{5}$$

Obtenemos

$$T''+\omega^4 T=0, \quad T(t)=A\cos\omega^2 t+B\operatorname{sen}\omega^2 t, \tag{6}$$

$$\Delta_2\Delta_2 R-k^4R=0, \quad k^4=\frac{\omega^4}{c^4}. \tag{7}$$

La última ecuación se puede escribir así:

$$(\Delta_2+k^2)(\Delta_2-k^2)R(r)=0. \tag{8}$$

De esta manera $R(r)$ puede ser la solución de la ecuación

$$(\Delta_2+k^2)R(r)=0, \quad \text{es decir,} \quad \frac{d^2R}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{dR}{dr}+k^2R=0, \tag{9}$$

o de la ecuación

$$(\Delta_2-k^2)R(r)=0, \quad \text{es decir,} \quad \frac{d^2R}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{dR}{dr}-k^2R=0. \tag{9'}$$

Dado que nos interesan sólo las soluciones de la ecuación (8) que están acotadas para $r=0$, entonces

$$R(r)=CJ_0(kr)+DI_0(kr). \tag{10}$$

Para satisfacer las condiciones de frontera (2), $R(r)$ debe satisfacer las condiciones de frontera

$$R(r_0)=R'(r_0)=0. \tag{11}$$

Sustituyendo con (10) en (11), obtenemos las ecuaciones

$$\left.\begin{aligned} CJ_0(kr_0)+DI_0(kr_0)=0,\\ CJ_0'(kr_0)+DI_0'(kr_0)=0. \end{aligned}\right\} \tag{12}$$

Buscamos las soluciones no triviales de la ecuación (8) que satisfacen las condiciones de frontera (11), por eso las constantes C y D no deben convertirse en cero simultáneamente, en consecuencia, el determinante del sistema (12) debe ser igual a cero. Así llegamos a la ecuación trascedente

$$J_0(kr_0)\,I_0'(kr_0)-I_0(kr_0)\,J_0'(kr_0)=0 \tag{13}$$

para determinar los valores propios de nuestro problema de contorno k_1, k_2, ..., k_n, . . . Como funciones propias se puede tomar

$$R_n(r)=R(k_n r)=I_0(k_n r_0)\,J_0(k_n r)-J_0(k_n r_0)\,I_0(k_n r). \tag{14}$$

11*

Estas funciones son ortogonales*) con respecto al núcleo r sobre el segmento $0 \leqslant r < r_0$. Para demostrar esta afirmación observemos que la ecuación (7) se puede escribir en la forma

$$\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left\{ r\frac{d}{dr}\left[\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{dR}{dr}\right)\right]\right\} - k^4 R = 0. \qquad (15)$$

Suponemos en la ecuación (15) $R = R_n(r)$, $k = k_n$, y que después $R = R_m(r)$, $k = k_m$, multiplicamos la primera de las igualdades obtenidas por $rR_m(r)$ y la segunda, por $rR_n(r)$, restamos los resultados e integramos con respecto a r entre cero y r_0; esto da

$$(k_m^4 - k_n^4)\int_0^{r_0} rR_mR_n\,dr = \left\{R_n\frac{d}{dr}\left[\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{dR_m}{dr}\right)\right] - \right.$$

$$\left. - R_m\frac{d}{dr}\left[\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{dR_n}{dr}\right)\right] + R_m'R_n'' - R_n'R_m''\right\}_{r=0}^{r=r_0}. \qquad (16)$$

---

*) La ortogonalidad de R_n y R_m puede ser demostrada sin la investigación detallada de sus comportamientos para $r = 0$. Tomemos las ecuaciones

$$\Delta_2\Delta_2 R_n(r) - k_n^4 R_n(r) = 0, \qquad \Delta_2\Delta_2 R_m(r) - k_m^4 R_m(r) = 0,$$

multiplicamos la primera por $R_m(r)$ y la segunda por $R_n(r)$ y restamos; llegamos a la igualdad

$$R_m\Delta_2\Delta_2 R_n - R_n\Delta_2\Delta_2 R_m = (k_n^4 - k_m^4)\,R_mR_n.$$

Integramos esta igualdad sobre el círculo K con la frontera F, $0 \leqslant r < r_0$, $0 \leqslant \varphi < 2\pi$ y utilizamos la fórmula de Green

$$(k_n^4 - k_m^4)\iint_K R_mR_n\,d\sigma = \iint_K [R_m\Delta_2\Delta_2R_n - R_n\Delta_2\Delta_2R_m]\,d\sigma =$$

$$= \int_F \left(R_m\frac{d\Delta_2R_n}{dr} - R_n\frac{d\Delta_2R_m}{dr}\right)ds + \int_F \left(\frac{dR_n}{dr}\Delta_2R_m - \right.$$

$$\left. - \frac{dR_m}{dr}\Delta^2R_n\right)ds = 0, \qquad (17)$$

dado que sobre la circunferencia Γ, $r = r_0$, tiene lugar

$$R_m(r_0) = R_n(r_0) = 0, \qquad R_m'(r_0) = R_n'(r_0) = 0.$$

Si $k_m \neq k_n$ (k_m, $k_n \geqslant 0$), entonces de la igualdad

$$(k_n^4 - k_m^4)\iint_K R_mR_n\,d\sigma = 0$$

se deduce la igualdad

$$\iint_K R_mR_n\,d\sigma = 0,$$

es decir,

$$\int_0^{r_0} rR_m(r)\,R_n(r)\,dr = 0.$$

La sustitución en el segundo miembro de la igualdad última se convierte en cero idénticamente para $r = 0$, lo que se deriva de la estructura de las series para las funciones de Bessel $J_0(x)$ e $I_0(x)$, y para $r = r_0$ esta sustitución se convierte en cero en virtud de las condiciones de frontera (11). Por eso para $k_m \neq k_n$, $k_m \geqslant 0$, $k_n \geqslant 0$, será:

$$\int_0^{r_0} rR_m R_n dr = 0. \tag{17}$$

Si en la igualdad (16) se sustituye k_m por k y se pasa al límite cuando $k \to k_n$, entonces, liberándose de la indeterminación según la regla de L'Hospital, hallamos*)

$$\|R_n\|^2 = \int_0^{r_0} rR_n^2(r)\,dr\,\frac{r_0^6}{4}\left\{R_n''^2 - R_n'\frac{d}{dr}\left[\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{dR_n}{dr}\right)\right] - \right.$$

$$\left. -\frac{R_n' R_n''}{k_n^4 r_n^4} - R_n' R_n'''\right\}_{r=r_0} = \frac{r_0^6}{4}R_n''^2(r_0) =$$

$$= r_0^2 J_0^2(k_n r_0)\, I_0^2(k_n r_0). \tag{18}$$

La solución del problema de contorno (1), (2), (3) la obtenemos en forma de suma de la serie

$$u(r, t) = \sum_{n=1}^{+\infty}\{A_n \cos(c^2 k_n^2 t) + B_n \operatorname{sen}(c^2 k_n^2 t)\}\, R_n(r),$$

donde

$$A_n = \frac{\int_0^{r_0} rf(r)\, R_n(r)\,dr}{\|R_n\|^2}, \qquad B_n = \frac{\int_0^{r_0} rF(r)\, R_n(r)\,dr}{c^2 k_n^2 \|R_n\|^2}.$$

72. $$u(r, t) = \frac{c^2 I}{2\pi D}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{[I_0(k_n r_0) - J_0(k_n r_0)]\cdot R_n(r)}{k_n^3 r_0^2 I_0^2(k_n r_0)\, J_0^2(k_n r_0)} \operatorname{sen}(k_n^2 c^2 t),$$

donde la rigidez cilíndrica D es igual a

$$D = \frac{2Eh^3}{3(1-m^2)}\,{}^{**)},$$

y $R_n(r)$ tiene el mismo sentido que en el problema anterior.

---

*) Se podía utilizar de modo análogo la relación (17) obtenida en la llamada anterior.

**) Véase la solución del problema 18 del capítulo presente.

73. $u(r, t) =$

$$= \frac{2p_0c^2r_0^2}{\omega D} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\operatorname{sen}(k_n^2c^2t) - \frac{k_n^2c^2}{\omega}\operatorname{sen}\omega t}{1 - \left(\frac{k_n^2c^2}{\omega}\right)^2} \cdot \frac{J_1(k_nr_0)R_n(r)}{k_n^2r_0^2J_0^2(k_nr)I_0^2(k_nr)},$$

donde R_n y D tienen el mismo sentido que en el problema anterior*).

74. $u(r, t) =$

$$= \frac{c^2p_0}{2\pi D} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\operatorname{sen}(k_n^2c^2t) - \frac{k_n^2c^2}{\omega}\operatorname{sen}\omega t}{1 - \left(\frac{k_n^2c^2}{\omega}\right)^2} \cdot \frac{[I_0(k_nr_0) - J_0(k_nr_0)]R_n(r)}{k_n^2r_0^2J_0^2(k_nr_0)I_0^2(k_nr_0)} \text{*)}.$$

75. La solución del problema de contorno

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\left\{\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r}\right\}, \quad r^* < r < r^{**}, \quad 0 < t < +\infty. \tag{1}$$

$$u(r^*, t) = u(r^{**}, t) = 0, \quad 0 < t < +\infty, \tag{2}$$

$$u(r, 0) = \varphi(r), \quad u_t(r, 0) = \psi(r), \quad r^* \leqslant r \leqslant r^{**}, \tag{3}$$

es $$u(r, t) = \sum_{n=1}^{+\infty} \{A_n\cos(a\lambda_nt) + B_n\operatorname{sen}(a\lambda_n)\}R_n(r), \tag{4}$$

donde $$R_n(r) = J_0(r\lambda_n)H_0^{(1)}(r^{**}\lambda_n) - J_0(r^{**}\lambda_n)H_0^{(1)}(r\lambda_n), \tag{5}$$

λ_n son las raíces positivas de la ecuación

$$J_0(r^*\lambda)H_0^{(1)}(r^{**}\lambda) - J_0(r^{**}\lambda)H_0^{(1)}(r^*\lambda) = 0, \tag{6}$$

$$A_n = \frac{\pi^2\lambda_n^2}{2} \cdot \frac{J_0^2(\lambda_nr^*)}{J_0^2(\lambda_nr^{**}) - J_0^2(\lambda_nr^*)} \int_{r^*}^{r^{**}} r\varphi(r)R_n(r)\,dr, \tag{7}$$

$$B_n = \frac{\pi^2\lambda_n}{2a} \cdot \frac{J_0^2(\lambda_nr^*)}{J_0^2(\lambda_nr^{**}) - J_0^2(\lambda_nr^*)} \int_{r^*}^{r^{**}} r\psi(r)R_n(r)\,dr. \tag{7'}$$

76. $$u(r, t) = R(r)\operatorname{sen}\omega t + \sum_{n=1}^{+\infty} B_nR_n(r)\operatorname{sen} a\lambda_nt. \tag{1}$$

$$R(r) = \frac{p_0}{\omega^2\rho} \times$$

$$\times \left\{ \frac{\left[H_0^{(1)}\left(\frac{\omega r^{**}}{a}\right) - H_0^{(1)}\left(\frac{\omega r^*}{a}\right)\right]J_0\left(\frac{\omega r}{a}\right) + \left[\left(J_0\frac{\omega r^*}{a}\right) - J_0\left(\frac{\omega r^{**}}{a}\right)\right]H_0^{(1)}\left(\frac{\omega r}{r}\right)}{J_0\left(\frac{\omega r^*}{a}\right)H_0^{(1)}\left(\frac{\omega r^{**}}{a}\right) - H_0^{(1)}\left(\frac{\omega r^*}{a}\right)J_0\left(\frac{\omega r^{**}}{a}\right)} - 1 \right\}, \tag{2}$$

---

*) En caso de resonancia $\omega \to \omega_n = k_n^2c^2$, la indeterminacíon en la resolución se salva aplicando la regla de L'Hospital.

$$B_n=\frac{\pi^2\lambda_n}{2a}\cdot\frac{J_0^2(\lambda_n r^*)}{J_0^2(\lambda_n r^{**})-J_0^2(\lambda_n r^*)}\int_{r^*}^{r^{**}} rR(r)\,R_n(r)\,dr, \tag{3}$$

$$R_n(r)=J_0(\lambda_n r)\,H_0^{(1)}(\lambda_n r^{**})-J_0(\lambda_n r^{**})\,H_0^{(1)}(\lambda_n r), \tag{4}$$

λ_n son las raíces positivas de la ecuación

$$J_0(\lambda r^*)\,H_0^{(1)}(\lambda r^{**})-J_0(\lambda r^{**})\,H_0^{(1)}(\lambda r^*)=0. \tag{5}$$

77. $$u(r,t)=\sum_{n=1}^{+\infty}\{A_n\cos a\lambda_n t+B_n\operatorname{sen} a\lambda_n t\}\,R_n^*(r), \tag{1}$$

$$R_n^*=J_0(\lambda_n r)\,H_0^{(1)\prime}(\lambda_n r^{**})-J_0'(\lambda_n r^{**})\,H_0^{(1)\prime}(\lambda_n r), \tag{2}$$

λ_n son las raíces positivas de la ecuación

$$J_0'(\lambda r^*)\,H_0^{(1)\prime}(\lambda r^{**})-J_0'(\lambda r^{**})\,H_0^{(1)\prime}(\lambda r^*)=0, \tag{3}$$

$$A_n=\frac{\int_{r^*}^{r^{**}} r\varphi(r)\,R_n^*(r)\,dr}{\int_{r^*}^{r^{**}} rR_n^{*2}(r)\,dr},\qquad B_n=\frac{\int_{r^*}^{r^{**}} r\psi(r)\,R_n^*(r)\,dr}{a\lambda_n\int_{r^*}^{r^{**}} rR_n^{*2}(r)\,dr}.$$

78. $$u(r,z,t)=\left\{\sum_{n=1}^{+\infty}A_n I_0\left(r\sqrt{\frac{n^2\pi^2}{l^2}-\frac{\omega^2}{a^2}}\right)\cos\frac{n\pi z}{l}\right\}\cos\omega t+$$

$$+\sum_{m,\,n=0}^{+\infty}B_{mn}J_0\left(\frac{\mu_m r}{r_0}\right)\cos\frac{n\pi z}{l}\cos ta\sqrt{\frac{\mu_m^2}{r_0^2}+\frac{n^2\pi^2}{l^2}}, \tag{1}$$

$$A_n=-\frac{2}{l\sqrt{\frac{n^2\pi^2}{l^2}-\frac{\omega^2}{a^2}}\,I_1\left(r_0\sqrt{\frac{n^2\pi^2}{l^2}-\frac{\omega^2}{a^2}}\right)}\int_0^l f(z)\cos\frac{n\pi z}{l}\,dz,$$

$$n=1,\ 2,\ 3,\ \ldots, \tag{2}$$

$$A_0=\frac{a^2}{l\omega^2 J_1\left(\frac{\omega r_0}{a}\right)}\int_0^l f(z)\,dz, \tag{2'}$$

$$B_{nm}=-\frac{2A_n}{r_0^2J_0^2(\mu_m)}\int_0^{r_0} rI_0\left(r\sqrt{\frac{n^2\pi^2}{l^2}-\frac{\omega^2}{a^2}}\right)J_0\left(\frac{\mu_m r}{r_0}\right)dr,\quad n=1,2,3,\ldots, \tag{3}$$

$$B_{0m}=-\frac{2A_0}{r_0^2J_0^2(\mu_m)}\int_0^{r_0} rJ_0\left(\frac{\omega r}{a}\right)J_0\left(\frac{\mu_m r}{r_0}\right)dr, \tag{3'}$$

$\mu_{mn}=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \ldots$ son las raíces positivas de la ecuación $J_1(\mu)=0$.

Observación. El término $\cos \omega t$ en la igualdad (1) es la solución particular de la ecuación

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\left\{\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial a}{\partial r}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right\},$$

que satisface las condiciones heterogéneas de frontera del problema.

79. El potencial de las velocidades es igual a

$$u(r, z, t)=\left\{\sum_{m=0}^{+\infty} A_m \operatorname{ch} z\sqrt{\frac{\mu_m^2}{r_0^2}-\frac{\omega^2}{a^2}}\, J_0\left(\frac{\mu_m r}{r_0}\right)\right\}\cos \omega t+$$

$$+\sum_{n,\, m=0}^{+\infty} B_{nm}\cos\frac{n\pi z}{l}\, J_0\left(\frac{\mu_m r}{l}\right)\cos ta\sqrt{\frac{\mu_m^2}{r^2}+\frac{n^2\pi^2}{l^2}},$$

$$A_m=\frac{2}{r_0^2 J_0^2(\mu_m)\sqrt{\frac{\mu_m^2}{r_0^2}-\frac{\omega^2}{a^2}}\operatorname{sh} l\sqrt{\frac{\mu_m^2}{r_0^2}-\frac{\omega^2}{a^2}}}\times\int_0^{r_0} rf(r)\, J_0\left(\frac{\mu_m r}{r_0}\right)dr,$$

$$B_{nm}=-\frac{2A_m}{l}\int_0^l \operatorname{ch} z\sqrt{\frac{\mu_m^2}{r_0^2}-\frac{\omega^2}{a^2}}\cos\frac{n\pi z}{l}\,dz, \quad n=1, 2, \ldots$$

$$B_{0m}=-\frac{A_m}{l}\int_0^l \operatorname{ch} z\sqrt{\frac{\mu_m^2}{r_0^2}-\frac{\omega^2}{a^2}}\,dz,$$

μ_m, $(m=0, 1, 2, \ldots)$, son las raíces positivas de la ecuación $J_1(\mu)=0$.

80. El potencial de las velocidades es igual a

$$u(r, z, t)=\left\{\sum_{n=0}^{+\infty} A_n R_n(r)\cos\frac{n\pi z}{l}\right\}\cos \omega t+$$

$$\sum_{n,\, m=0}^{+\infty} B_{nm}B_m^*(r)\cos\frac{n\pi z}{l}\cos ta\sqrt{\lambda_m^2+\frac{n^2\pi^2}{l^2}}, \qquad (1)$$

$$R_n(r)=K_0'(\varkappa_n r^*)\, I_0(\varkappa_n r)-K_0(\varkappa_n r)\, I_0'(\varkappa_n r^*),$$

$$\varkappa_n=\sqrt{\frac{n^2\pi^2}{l^2}-\frac{\omega^2}{a^2}}, \quad n=1, 2, \ldots ^{*)}, \qquad (2)$$

$$R_0(r)=N_0'\left(\frac{\omega r^*}{a}\right)J_0\left(\frac{\omega r}{a}\right)-N_0\left(\frac{\omega r}{a}\right)J_0'\left(\frac{\omega r^*}{a}\right), \qquad (3)$$

$$A_n=\frac{2}{lR_n'(r^{**})}\int_0^l f(z)\cos\frac{n\pi z}{l}\,dz, \quad n=1, 2, \ldots,$$

---

*) Aquí se supone que $\varkappa_n$ son reales; en caso contrario K_0 e I_0 se sustituyen por N_0 y J_0.

$$A_0 = \frac{1}{lR_0'(r^{**})} \int_0^l f(z)\,dz, \tag{4}$$

$$R_m^*(r) = J_0(\lambda_m r)\, H_0^{(1)'}(\lambda_m r^{**}) - J_0'(\lambda_m r^{**})\, H_0^{(1)}(\lambda_m r),$$

λ_m son las raíces positivas de la ecuación

$$J_0'(\lambda r^*)\, H_0^{(1)'}(\lambda r^{**}) - J_0'(\lambda r^{**})\, H_0^{(1)'}(\lambda r^*) = 0,$$

$$B_{nm} = -\frac{A_n \int\limits_{r^*}^{r^{**}} rR_n(r)\, R_m^*(r)\,dr}{\int\limits_{r^*}^{r^{**}} rR_m^{*2}(r)\,dr}.$$

81. El potencial de las velocidades es igual a

$$u(r, z, t) = \left\{ \sum_{h=0}^{+\infty} A_n R_n^*(r) \operatorname{ch} z \sqrt{\lambda_n^2 - \frac{\omega^2}{a^2}} \right\} \cos \omega t +$$

$$\sum_{n,\,m=0}^{+\infty} B_{nm} R_\pi^*(r) \cos \frac{m\pi z}{l} \cos ta \sqrt{\lambda_\pi^2 + \frac{m^2\pi^2}{l^2}},$$

$$R_n^*(r) = J_0(\lambda_n r)\, H_0^{(1)'}(\lambda_n r^{**}) - J_0'(\lambda_n r^{**})\, H_0^{(1)}(\lambda_n r),$$

λ_n $(n = 0, 1, 2, \ldots)$, son las raíces positivas de la ecuación

$$J_0'(\lambda r^*)\, H_0^{(1)'}(\lambda r^{**}) - J_0'(\lambda r^{**})\, H_0^{(1)'}(\lambda r^*) = 0^{*)},$$

$$A_n = \frac{\int\limits_{r^*}^{r^{**}} rf(r)\, R_n^*(r)\,dr}{\sqrt{\lambda_n^2 - \frac{\omega^2}{a^2}} \operatorname{sh} l \sqrt{\lambda_n^2 - \frac{\omega^2}{a^2}} \int\limits_{r^*}^{r^{**}} rR^{*2}(r)\,dr},$$

$$B_{nm} = -\frac{2A_n}{l} \int_0^l \operatorname{ch} z \sqrt{\lambda_n^2 - \frac{\omega^2}{a^2}} \cos \frac{m\pi z}{l}\,dz, \quad n = 1, 2, 3, \ldots,$$

$$B_{n0} = -\frac{A_n}{l} \int_0^l \operatorname{ch} z \sqrt{\lambda_n^2 - \frac{\omega^2}{a^2}}\,dz.$$

---

*) Aquí se supone que $\lambda_n > \frac{\omega}{a}$ para todo $n = 0, 1, 2, \ldots$

82. $$u(r, \varphi, t)=\frac{2K}{\pi a r_0}\sum_{k,\ n=0}^{+\infty}\frac{J_n\left(\frac{\mu_k^{(n)}r}{r_0}\right)J_n\left(\frac{\mu_k^{(n)}r_1}{r_0}\right)}{\varepsilon_n\mu_k^{(n)}J_n'^2(\mu_k^{(n)})}\times$$

$$\times\cos n(\varphi-\varphi_1)\operatorname{sen}\frac{a\mu_k^{(n)}t}{r_0},$$

donde $\mu_k^{(n)}$ son las raíces positivas de la ecuación $J_n(\mu)=0$;

$$\varepsilon_n=\begin{cases}2 & \text{para} \quad n=0\\ 1 & \text{para} \quad n\neq 0;\end{cases}$$

r_0, el radio de la membrana; (r_1, φ_1), el punto del golpe.

Indicación. Se puede en principio considerar que el impulso K está distribuido uniformemente en el momento $t=0$ sobre el área elemental $\varphi_1\leqslant\varphi\leqslant\leqslant\varphi_1+\Delta\varphi_1$, $r\leqslant r\leqslant r_1+\Delta r$, es decir, que las condiciones iniciales son de la forma

$$u(r, \varphi, 0)=0, \quad 0\leqslant\varphi\leqslant\varphi_0, \quad 0\leqslant r\leqslant r_0,$$

$$u_t(r, \varphi, 0)=\begin{cases}\dfrac{K}{\rho r_1\Delta\varphi\Delta r} & \text{sobre el área indicada,}\\ 0 & \text{fuera del área indicada,}\end{cases}$$

y después, en la solución obtenida con estas condiciones iniciales, pasar al límite cuando $\Delta\varphi\to 0$, y $\Delta r\to 0$.

Se pueden utilizar también las funciones δ impulsivas para la expresión de las condiciones iniciales, tomando

$$u(r, \varphi, 0)=0, \quad 0\leqslant\varphi\leqslant\varphi_0, \quad 0\leqslant r\leqslant r_0,$$

$$u_t(r, \varphi, 0)=\frac{K}{\rho}\delta^*(r-r_1)\,\delta(\varphi-\varphi_1),$$

donde la función $\delta(\varphi-\varphi_1)$ se determina del modo habitual y la función $\delta^*(r-r_1)$ por medio de las igualdades

$$\int_{r_0'}^{r_0''} r\delta^*(r-r_1)\,f(r)\,dr=f(r_1), \quad \text{si} \quad r_0'<r_1<r_0'',$$

$$\int_{r_0'}^{r_0''} r\delta^*(r-r_1)\,f(r)\,dr=0, \quad \text{si } r_1 \text{ está fuera del segmento } [r_0', r_0''],$$

cualquiera que sea la función continua $f(r)$. De esta manera, el producto $\delta^*(r-r_1)\,\delta(\varphi-\varphi_1)$ es la función δ ordinaria para la región plana; multiplicándola por el elemento del área en las coordenadas polares $rdrd\varphi$ e integrando sobre la región en examen, obtenemos 1 ó 0, según pertenezca el punto (r_1, φ_1) a esta región o no*).

*) Véase [7], pág. 301.

83. El potencial de las velocidades horizontales de las partículas del agua es la solución del problema de contorno

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\left\{\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2}\right\},\quad 0\leqslant r\leqslant r_0,$$

$$0\leqslant\varphi\leqslant 2\pi,\quad 0<t<+\infty, \tag{1}$$

$$u_r(r_0,\varphi,t)=0,\quad 0\leqslant\varphi\leqslant 2\pi,\quad 0<t<+\infty, \tag{2}$$

$$u(r,\varphi,0)=v_0 r\cos\varphi,\quad u_t(r,\varphi,0)=0,\quad 0\leqslant r\leqslant r_0,\quad 0\leqslant\varphi\leqslant 2\pi, \tag{3}$$

para él obtenemos la expresión

$$u(r,\varphi,t)=v_0\cos\varphi\sum_{n=1}^{+\infty}A_nJ_1\left(\frac{\mu_n r}{r_0}\right)\cos\frac{a\mu_n t}{r_0}, \tag{4}$$

donde μ_n son las raíces positivas de la ecuación $J_1'(\mu)=0$ y

$$A_n=\frac{2\mu_n^2\int\limits_0^{r_0}r^2J_1\left(\frac{\mu_n r}{r_0}\right)dr}{r_0\left[\mu_n^2-1\right]J_1^2(\mu_n)}. \tag{5}$$

84. $u(r,\varphi,t)=\dfrac{r_0}{a\rho}\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{A_n}{\mu_n}J_1\left(\frac{\mu_n r}{r_0}\right)\int\limits_0^t\cos(\varphi-\omega\tau)\times\operatorname{sen}\frac{a\mu_n}{r_0}(t-\tau)\,d\tau,$ (1)

donde μ_n son las raíces positivas de la ecuación $J_1(\mu)=0$,

$$A_n=\frac{\int\limits_0^{r_0}rf(r)J_1\left(\frac{\mu_n r}{r_0}\right)dr}{\int\limits_0^{r_0}rJ_1^2\left(\frac{\mu_n r}{r_0}\right)dr}=\frac{2\int\limits_0^{r_0}rf(r)J_2\left(\frac{\mu_n r}{r_0}\right)dr}{r_0^2J_1'^2(\mu_n)}. \tag{2}$$

Observación. Se puede obtener la otra forma de la solución. Para eso se debe, primero, sin preocuparse sobre las condiciones iniciales, hallar la solución particular de la ecuación heterogénea

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\left\{\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2}\right\}+\frac{f(r)}{\rho}\cos(\varphi-\omega t),$$

que se anula para $r=r_0$, en la forma

$$U(r,\varphi,t)=R(r)\cos(\varphi-\omega t).$$

Usando el método de variación de las constantes con la utilización del wronskiano de las funciones cilíndricas $W\{J_1(z),\ N_1(z)\}=\dfrac{2}{\pi z}$, para $R(r)$ no es difícil

obtener la expresión

$$R(r)=\frac{\pi\omega}{2a\rho}\cdot\frac{\frac{J_1\left(\frac{\omega r}{a}\right)}{a}}{J\left(\frac{\omega r_0}{a}\right)}\left\{J_1\left(\frac{\omega r_0}{a}\right)\int_0^{r_0} rf(r)\,N_1\left(\frac{\omega r}{a}\right)dr-\right.$$

$$\left.-N_1\left(\frac{\omega r_0}{a}\right)\int_0^{r_0} rf(r)\,J_1\left(\frac{\omega r}{a}\right)dr\right\}-$$

$$-\frac{\pi\omega}{2a\rho}J_1\left(\frac{\omega r}{a}\right)\int_0^{r} rf(r)\,N_1\left(\frac{\omega r}{a}\right)dr+\frac{\pi\omega}{2a\rho}N_1\left(\frac{\omega r}{a}\right)\int_0^{r} rf(r)\,J_1\left(\frac{\omega r}{a}\right)dr.$$

Después se debe hallar la solución de la ecuación homogénea con correspondientes condiciones iniciales heterogéneas.

85. $$u(r,\ \varphi,\ t)=\left\{\sum_{n=1}^{+\infty} C_n\,(a^2\mu_n^2-r_0^2\omega^2)\,J_1\left(\frac{\mu_n r}{r_0}\right)\right\}\cos(\varphi-\omega t)-$$

$$-2r_0^2\varkappa\omega\left\{\sum_{n=1}^{+\infty} C_n J_1\left(\frac{\mu_n r}{r_0}\right)\right\}\operatorname{sen}(\varphi-\omega t),$$

$$C_n=\frac{2\int_0^{r_0} rf(r)\,J_1\left(\frac{\mu_n r}{r_0}\right)dr}{\rho J_1'^2(\mu_n)\left[(r_0^2\omega^2-a^2\mu_n^2)^2+4r_0^4\varkappa^2\omega^2\right]},$$

μ_n son las raíces positivas de la ecuación $J_1(\mu)=0$.

Indicación. La solución del problema puede ser obtenida como la parte real de la solución de la ecuación

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\left\{\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2}\right\}-2\varkappa\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{f(r)}{\rho}e^{i(\varphi-\omega t)},\qquad(1)$$

que se convierte en cero cuando $r=r_0$. Esta solución de la ecuación (1) se puede buscar en la forma

$$U(r,\ \varphi,\ t)=R(r)\,e^{i(\varphi-\omega t)}.$$

La solución de la ecuación diferencial que se obtiene para $R(r)$ se puede hallar en la forma

$$R(r)=\sum_{n=1}^{+\infty} A_n J_1\left(\frac{\mu_n r}{r_0}\right).$$

86. $u(r, \varphi, t)=\left\{v(r, t)+\frac{r^2}{r_0^2}f(t)\right\}\cos n\varphi,$

$$v(r, t)=\frac{r_0}{a}\sum_{m=1}^{+\infty}\frac{J_n\left(\frac{\mu_m r}{r_0}\right)}{\mu_m}\int_0^t \psi_m(\tau)\operatorname{sen}\frac{a\mu_m}{r}(t-\tau)\,d\tau.$$

$$\psi_m(t)=\frac{2\int_0^{r_0} r\,[3a^2f(t)-r^2f''(t)]\,J_m\left(\frac{\mu_m r}{r_0}\right)dr}{r_0^4 J_n'^2(\mu_m)},$$

μ_m son las raíces positivas de la ecuación $J_n(\mu)=0$.

87. $u(r, \varphi, t)=\operatorname{sen}\omega t\sum_{n=0}^{+\infty}J_n\left(\frac{\omega r}{a}\right)(A_n\cos n\varphi+$

$$+B_n\operatorname{sen}n\varphi)+\sum_{n,\,m=0}^{+\infty}J_n\left(\frac{\mu_m^{(n)}r}{r_0}\right)(A_{nm}\cos n\varphi+B_{nm}\operatorname{sen}n\varphi)\operatorname{sen}\frac{a\mu_m^{(n)}t}{r_0},$$

$\mu_m^{(n)}$ son las raíces positivas de la ecuación $J_n(\mu)=0$.

$$A_0=\frac{1}{2\pi J_0\left(\frac{\omega r_0}{a}\right)}\int_0^{2\pi}F(\varphi)\,d\varphi,\quad A_n=\frac{1}{\pi J_n\left(\frac{\omega r_0}{a}\right)}\int_0^{2\pi}F(\varphi)\cos n\varphi\,d\varphi,$$

$$n=1, 2, 3, \ldots,$$

$$B_n=\frac{1}{\pi J_n\left(\frac{\omega r_0}{a}\right)}\int_0^{2\pi}F(\varphi)\operatorname{sen}n\varphi\,d\varphi,\quad n=1, 2, 3, \ldots,$$

$$A_{nm}=\frac{2\omega A_n\int_0^{r_0} rJ_n\left(\frac{\omega r}{a}\right)J_n\left(\frac{\mu_m^{(n)}r}{r_0}\right)dr}{ar_0\mu_m^{(n)}J_n'^2(\mu_m^{(n)})},\quad n, m=0, 1, 2, 3, \ldots,$$

$$B_{nm}=\frac{2\omega B_n\int_0^{r_0} rJ_n\left(\frac{\omega r}{a}\right)J_n\left(\frac{\mu_m^{(n)}r}{r_0}\right)dr}{ar_0\mu_m^{(n)}J_n'^2(\mu_m^{(n)})},\quad n=1, 2, 3, \ldots, m=0, 1, 2, \ldots$$

Indicación. Primero es conveniente hallar la solución particular de la ecuación.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}+a^2\left\{\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2}\right\},$$

que satisface la condición de frontera

$$u(r_0, \varphi, t)=F(\varphi)\operatorname{sen}\omega t.$$

Esta solución particular es natural buscarla en la forma

$$U(r, \varphi, t)+V(r, \varphi)\operatorname{sen}\omega t.$$

88. $u(r, \varphi, z, t)=$

$$=\left\{\sum_{n=0}^{+\infty} A_m I_n\left(r\sqrt{\frac{m^2\pi^2}{l^2}-\frac{\omega^2}{a^2}}\right)\cos\frac{m\pi z}{l}\right\}\cos n\varphi\cos\omega t+$$

$$+\sum_{m,\,k=0}^{+\infty} A_{mk} J_n\left(\frac{\mu_k^{(n)} r}{r_0}\right)\cos\frac{m\pi z}{l}\cos n\psi\cos at\sqrt{\frac{m^2\pi^2}{l^2}+\frac{\mu_k^{(n)2}}{r_0^2}},$$

$\mu_k^{(n)}$ son las raíces positivas de la ecuación $J_n'(\mu)=0$,

$$A_m=\frac{2\int\limits_0^l f(z)\cos\frac{m\pi z}{l}\,dz}{l\sqrt{\frac{m^2\pi^2}{l^2}-\frac{\omega^2}{a^2}}\,I_n'\left(r\sqrt{\frac{m^2\pi^2}{l^2}-\frac{\omega^2}{a^2}}\right)},\quad A_0=\frac{\int\limits_0^l f(z)\,dz}{\frac{l\omega}{a}J_n'\left(\frac{\omega r_0}{a}\right)},$$

$$A_{mk}=\frac{-2A_m\int\limits_0^{r_0} rI_n\left(r\sqrt{\frac{m^2\pi^2}{l^2}-\frac{\omega^2}{a^2}}\right)J_n\left(\frac{\mu_k^{(n)}r}{r_0}\right)dr}{r_0^2\left[1-\frac{n^2}{\mu_k^{(n)2}}\right]J_n^2\left(\mu_k^{(n)}\right)},$$

$$m=1,\ 2,\ \ldots,\ k=0,\ 1,\ \ldots,$$

$$A_{0k}=\frac{-2A_0\int\limits_0^{r_0} rJ_n\left(\frac{\omega r}{a}\right)J_n\left(\frac{\mu_k^{(n)}r}{r_0}\right)dr}{r_0^2\left[1-\frac{n^2}{\mu_k^{(n)2}}\right]J_n^2\left(\mu_k^{(n)}\right)},\quad k=0,\ 1,\ 2,\ \ldots$$

89. $u(r, \varphi, z, t)=$

$$=\left\{\sum_{k=0}^{+\infty} A_k J_n\left(\frac{\mu_k^{(n)}r}{r_0}\right)\operatorname{ch} z\sqrt{\frac{\mu_k^{(n)2}}{r_0^2}-\frac{\omega^2}{a^2}}\right\}\cos n\varphi\cos\omega t+$$

$$+\sum_{m,\,k=0}^{+\infty} A_{mk} J_n\left(\frac{\mu_k^{(n)}r}{r_0}\right)\cos\frac{m\pi z}{l}\cos n\varphi\cos at\sqrt{\frac{m^2\pi^2}{l^2}+\frac{\mu_k^{(n)2}}{r_0^2}},$$

$\mu_k^{(n)}$ son las raíces positivas de la ecuación $J_n'(\mu)=0$,

$$A_k=\frac{2\int\limits_0^{r_0} rf(r)J_n\left(\frac{\mu_k^{(n)}r}{r_0}\right)dr}{r_0^2\left[1-\frac{n^2}{\mu_k^{(n)2}}\right]J_n^2\left(\mu_k^{(n)}\right)\sqrt{\frac{\mu_k^{(n)2}}{r_0^2}-\frac{\omega^2}{a^2}}\operatorname{sh} l\sqrt{\frac{\mu_k^{(n)2}}{r_0^2}-\frac{\omega^2}{a^2}}},$$

$$k=0,\ 1,\ 2,\ \ldots,$$

$$A_{mk}=-\frac{2}{l}A_k\int_0^l \operatorname{ch} z\sqrt{\frac{\mu_k^{(n)2}}{r_0^2}-\frac{\omega^2}{a^2}}\cos\frac{m\pi z}{l}\,dz,\quad m=1,\ 2,\ \ldots,$$

$$k=0,\ 1,\ 2,\ \ldots,$$

$$A_{0k}=-\frac{1}{l}A_k\int_0^l \operatorname{ch} z\sqrt{\frac{\mu_k^{(n)2}}{r_0^2}-\frac{\omega^2}{a^2}}\,dz,\quad k=0,\ 1,\ 2,\ \ldots,$$

90. $u(r,\ \varphi,\ t)=\dfrac{4K}{r_0\varphi_0\rho}\times$

$$\times\sum_{k,\ n=1}^{+\infty}\frac{J_{\frac{n\pi}{\varphi_0}}\left(\frac{\mu_k^{(n)}r}{r_0}\right)J_{\frac{n\pi}{\varphi_0}}\left(\frac{\mu_k^{(n)}r_1}{r_0}\right)}{\mu_k^{(n)}J'^{2}_{\frac{n\pi}{\varphi_0}}(\mu_k^{(n)})}\operatorname{sen}\frac{n\pi\varphi}{\varphi_0}\operatorname{sen}\frac{n\pi\varphi_1}{\varphi_0}\operatorname{sen}\frac{\mu_k^{(n)}at}{r_0},\tag{1}$$

donde $(r_1,\ \varphi_1)$ es el punto en que fue comunicado el impulso, K, $\mu_k^{(n)}$, las raíces de la ecuación $J_{\frac{n\pi}{\varphi_0}}(\mu_k^{(n)})=0$.

91. $u(r,\ \varphi,\ t)=\dfrac{\pi^2K}{a\rho\varphi_0}\times$

$$\times\sum_{n,\ k=1}^{+\infty}\frac{\lambda_k^{(n)}J^2_{\frac{n\pi}{\varphi_0}}(\lambda_k^{(n)}r_1)\,R_{nk}(\tilde r)\,R_{nk}(r)}{J^2_{\frac{n\pi}{\varphi_0}}(\lambda_k^{(n)}r_2)-J^2_{\frac{n\pi}{\varphi_0}}(\lambda_k^{(n)}r_1)}\operatorname{sen}\frac{n\pi\tilde\varphi}{\varphi_0}\operatorname{sen}\frac{n\pi\varphi}{\varphi_0}\operatorname{sen}\lambda_k^{(n)}at,$$

donde $R_{nk}(r)=Z_{\frac{n\pi}{\varphi_0}}(\lambda_k^{(n)}r)$ y $\lambda_k^{(n)}$ tienen el mismo sentido que en el problema 45 cap. V; $(\tilde r,\ \tilde\varphi)$ es el punto en que fue comunicado el impulso K; ρ, la densidad superficial de la masa de la membrana (la masa de una unidad de área).

92. El potencial de las velocidades de las partículas del gas es la solución del problema de contorno

$$\frac{\partial^2u}{\partial t^2}=a^2\left\{\frac{\partial^2u}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2u}{\partial\varphi^2}\right\},$$

$$r_1\leqslant r\leqslant r_2,\quad 0\leqslant\varphi\leqslant\varphi_0,\quad 0\leqslant t<+\infty,\tag{1}$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial r}\right|_{r=r_1}=\left.\frac{\partial u}{\partial r}\right|_{r=r_2}=0,\quad \left.\frac{\partial u}{\partial\varphi}\right|_{\varphi=0}=\left.\frac{\partial u}{\partial\varphi}\right|_{\varphi=\varphi_0}=0.\tag{2}$$

$$\left.\begin{aligned}u(r,\ \varphi,\ 0)&=f(r,\ \varphi)\\ u_t(r,\ \varphi,\ 0)&=F(r,\ \varphi),\end{aligned}\right\}\quad r_1\leqslant r\leqslant r_2,\quad 0\leqslant\varphi\leqslant\varphi_0.\tag{3}$$

La solución del problema de contorno (1), (2), (3) se puede representar en la forma

$$u(r,\ \varphi,\ t)=\sum_{n,\ k=0}^{+\infty}\{A_{nk}\cos a\lambda_k^{(n)}t+B_{nk}\operatorname{sen}a\lambda_k^{(n)}t\}\ R_{nk}(r)\cos\frac{n\pi\varphi}{\varphi_0},\tag{4}$$

donde

$$R_{nk}(r)=N'_{\frac{n\pi}{\varphi_0}}(\lambda_k^{(n)}r_1)\,J_{\frac{n\pi}{\varphi_0}}(\lambda_k^{(n)}r)-J'_{\frac{n\pi}{\varphi_0}}(\lambda_k^{(n)}r_1)\,N_{\frac{n\pi}{\varphi_0}}(\lambda_k^{(n)}r), \tag{5}$$

$\lambda_k^{(n)}$ son las raíces positivas de la ecuación

$$N'_{\frac{n\pi}{\varphi_0}}(\lambda r_1)\,J'_{\frac{n\pi}{\varphi_0}}(\lambda r_2)-J'_{\frac{n\pi}{\varphi_0}}(\lambda r_1)\,N'_{\frac{n\pi}{\varphi_0}}(\lambda r_2)=0, \tag{6}$$

$$A_{nk}=\frac{2}{\varphi_0\int\limits_{r_1}^{r_2} rR_{nk}^2(r)\,dr}\int\limits_{r_1}^{r_2}\int\limits_0^{\varphi_0} f(r,\ \varphi)\,R_{nk}(r)\cos\frac{n\pi\varphi}{\varphi_0}\,r\,dr\,d\varphi, \quad n>0, \tag{7}$$

$$A_{0k}=\frac{1}{\varphi_0\int\limits_{r_1}^{r_2} rR_{0k}^2(r)\,dr}\int\limits_{r_1}^{r_2}\int\limits_0^{\varphi_0} f(r,\ \varphi)\,R_{0k}(r)\,r\,dr\,d\varphi, \tag{8}$$

$$\int\limits_{r_1}^{r_2} rR^2\,nk(r)\,dr=\frac{2}{\pi^2\lambda_k^{(n)2}}\cdot\frac{J_n'^2(\lambda_k^{(n)}r_2)-J_n'^2(\lambda_k^{(n)}r_1)}{J_n'^2(\lambda_k^{(n)}r_2)}. \tag{9}$$

93. *Resolución.* Colocamos el origen del sistema esférico de coordenadas en el centro del recipiente y dirigimos el eje $\theta=0$ según la velocidad del movimiento del recipiente para $t<0$. Entonces, el potencial u de las velocidades de las partículas del gas no dependerá del ángulo φ y para u obtenemos el problema de contorno

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\left\{\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial u}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2\operatorname{sen}\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\operatorname{sen}\theta\frac{\partial u}{\partial\theta}\right)\right\}, \tag{1}$$

$$0\leqslant r\leqslant r_0,\quad 0\leqslant\theta\leqslant\pi,\quad 0\leqslant t<+\infty,$$

$$u_r(r_0,\ \theta,\ t)=0,\quad 0\leqslant\theta\leqslant\pi,\quad 0<t<+\infty, \tag{2}$$

$u(r,\ \theta,\ 0)=vr\cos\theta,\ \ u_t(r,\ \theta,\ 0)=0,\ \ 0\leqslant r\leqslant r_0,\ \ 0\leqslant\theta\leqslant\pi,$ (3)
Es natural tratar de buscar la solución del problema de contorno (1), (2), (3) en la forma

$$u(r,\ \theta,\ t)=w(r,\ t)\cos\theta. \tag{4}$$

Esto conduce al siguiente problema de contorno para w:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}=a^2\left\{\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial w}{\partial r}\right)-\frac{2w}{r^2}\right\},\quad 0\leqslant r\leqslant r_0,\quad 0<t<+\infty, \tag{5}$$

$$w_r(r_0,\ t)=0,\quad 0<t<+\infty, \tag{6}$$

$$w(r,\ 0)=vr,\quad w_t(r,\ 0)=0,\quad 0\leqslant r\leqslant r_0, \tag{7}$$

que se resuelve mediante el método de separación de variables, además, y para $w(r,\ t)$ obtenemos la expresión

$$w(r,\ t)=\sum_{k=1}^{+\infty} A_k\frac{J_{\frac{3}{2}}\left(\frac{\mu_k r}{r_0}\right)}{\sqrt{r}}\cos\frac{a\mu_k t}{r_0}, \tag{8}$$

donde μ_k son las raíces positivas de la ecuación

$$\mu J'_{\frac{3}{2}}(\mu)-\frac{1}{2}J_{\frac{3}{2}}(\mu)=0, \tag{9}$$

$$A_k=\frac{v\int\limits_0^{r_0} r^{\frac{5}{2}}J_{\frac{3}{2}}\left(\frac{\mu_k r}{r_0}\right)dr}{\frac{r_0^2}{2}J_{\frac{3}{2}}^2(\mu_k)\left[1-\frac{2}{\mu_k^2}\right]}, \quad k=1,\ 2,\ 3,\ \ldots \tag{10}$$

94. El potencial u de las velocidades de las partículas del gas es la solución del problema de contorno

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\left\{\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial u}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2\operatorname{sen}\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\operatorname{sen}\theta\frac{\partial u}{\partial\theta}\right)\right\}, \tag{1}$$

$$0\leqslant r\leqslant r_0,\quad 0\leqslant\theta\leqslant\pi,\quad 0<t<+\infty,$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial r}\right|_{r=r_0}=\omega A\cos\theta\cos\omega t, \tag{2}$$

$$u(r,\ \theta,\ 0)=0,\quad u_t(r,\ \theta,\ 0)=0. \tag{3}$$

La solución del problema de contorno (1), (2), (3) se puede representar en la forma

$$u(r,\ \theta,\ t)=\left\{\omega Ar+\sum_{n=1}^{+\infty}A_n\frac{J_{\frac{3}{2}}\left(\frac{\mu_n r}{r_0}\right)}{\sqrt{r}}\cos\theta\cos\omega t+\right.$$

$$+\sum_{k=1}^{+\infty}C_k\frac{J_{\frac{3}{2}}\left(\frac{\mu_k r}{r_0}\right)}{\sqrt{r}}\cos\theta\cos\frac{a\mu_k t}{r_0}, \tag{4}$$

donde μ_n son las raíces positivas de la ecuación

$$\mu J'_{\frac{3}{2}}(\mu)-\frac{1}{2}J_{\frac{3}{2}}(\mu)=0, \tag{5}$$

$$A_k=\frac{\frac{\omega^3 A}{a^2}\int\limits_0^{r_0} r^{\frac{5}{2}}J_{\frac{3}{2}}\left(\frac{\mu_k r}{r_0}\right)dr}{\left(\frac{\mu_k^2}{r_0^2}-\frac{\omega^2}{a^2}\right)\frac{r_0^2}{a^2}J_{\frac{3}{2}}^2(\mu_k)\left[1-\frac{2}{\mu_k^2}\right]}, \quad k=1,\ 2,\ 3,\ \ldots, \tag{6}$$

$$C_k=\frac{-\int\limits_0^{r_0}\left\{\omega Ar+\sum\limits_{n=1}^{+\infty}A_n\frac{J_{\frac{3}{2}}\left(\frac{\mu_n r}{r_0}\right)}{\sqrt{r}}\right\}r^{\frac{3}{2}}J_{\frac{3}{2}}\left(\frac{\mu_k r}{r_0}\right)dr}{\frac{r_0^2}{2}J_{\frac{3}{2}}^2(\mu_k)\left[1-\frac{2}{\mu_k^2}\right]}=$$

$$=-\omega A\frac{\int\limits_0^{r_0}r^{\frac{5}{2}}J_{\frac{3}{2}}\left(\frac{\mu_k r}{r_0}\right)dr}{\frac{r_0^2}{2}J_{\frac{3}{2}}^2(\mu_k)\left[1-\frac{2}{\mu_k^2}\right]}-A_k,\quad k=1,\ 2,\ 3,\ \ldots \tag{7}$$

Observación. El sumando

$$\left\{\omega Ar+\sum_{n=1}^{+\infty}A_n\frac{J_{\frac{3}{2}}\left(\frac{\mu_n r}{r_0}\right)}{\sqrt{r}}\right\}\cos\theta\cos\omega t, \tag{8}$$

que entra en (4) es la solución de la ecuación (1) que satisface la condición de frontera (2), pero no satisface las condiciones iniciales (3).

La función

$$\omega Ar\cos\theta\cos\omega t$$

satisface la condición de frontera (2), pero no satisface la ecuación (1).

95. $$u(r,\ 0,\ t)=\left\{\frac{Ar^n}{nr_0^{n-1}}+\sum_{i=1}^{+\infty}A_i\frac{J_{n+\frac{1}{2}}\left(\frac{\mu_i^{(n)}r}{r_0}\right)}{\sqrt{r}}\right\}P_n(\cos\theta)\cos\omega t+$$
$$+\sum_{k=1}^{+\infty}C_k\frac{J_{n+\frac{1}{2}}\left(\frac{\mu_k^{(n)}r}{r_0}\right)}{\sqrt{r}}P_n(\cos\theta)\cos\frac{a\mu_k^{(n)}t}{r_0}, \tag{1}$$

donde $\mu_k^{(n)}$ son las raíces positivas de la ecuación

$$\mu J'_{n+\frac{1}{2}}(\mu)-\frac{1}{2}J_{n+\frac{1}{2}}(\mu)=0, \tag{2}$$

$$A_k=-\frac{\frac{\omega^2}{a^2}\frac{A}{nr_0^{n-1}}\int\limits_0^{r_0}r^{n+\frac{3}{2}}J_{n+\frac{1}{2}}\left(\frac{\mu_k^{(n)}r}{r_0}\right)dr}{\frac{r_0^2}{2}J_{n+\frac{1}{2}}^2(\mu_k^{(n)})\left[1-\frac{n(n+1)}{\mu_k^{(n)2}}\right]}. \tag{3}$$

$$C_k = -\frac{\int\limits_0^{r_0}\left\{\frac{Ar^n}{nr_0^{n-1}}+\sum\limits_{i=1}^{+\infty} A_i \frac{J_{n+\frac{1}{2}}\left(\frac{\mu_i^{(n)}r}{r_0}\right)}{\sqrt{r}}\right\} r^{\frac{3}{2}} J_{n+\frac{1}{2}}\left(\frac{\mu_k^{(n)}r}{r_0}\right) dr}{\frac{r_0^2}{2} J^2_{n+\frac{1}{2}}(\mu_k^{(n)})\left[1-\frac{n(n+1)}{\mu_k^{(n)2}}\right]} =$$

$$= -\frac{A}{nr_0^{n-1}} \frac{\int\limits_0^{r_0} r^{n+\frac{3}{2}} J_{n+\frac{1}{2}}\left(\frac{\mu_k^{(n)}r}{r_0}\right) dr}{\frac{r_0^2}{2} J^2_{n+\frac{1}{2}}(\mu_k^{(n)})\left[1-\frac{n(n+1)}{\mu_k^{(n)2}}\right]} - A_k. \qquad (4)$$

Observación. Véase la observación a la respuesta al problema anterior.

96. El potencial de las velocidades de las partículas del gas es la solución del problema de contorno

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\left\{\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial u}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2 \operatorname{sen}\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\operatorname{sen}\theta\frac{\partial u}{\partial\theta}\right)\right\}, \qquad (1)$$

$$0 \leqslant r \leqslant r_0, \quad 0 \leqslant \theta \leqslant \pi, \quad 0 < t < +\infty,$$

$$u_r(r_0, \theta, t) = P_n(\cos\theta) f(t), \quad 0 \leqslant \theta \leqslant \pi, \quad 0 < t < +\infty, \qquad (2)$$

$$u(r, \theta, 0) = u_t(r, \theta, 0) = 0, \quad 0 \leqslant r \leqslant r_0, \quad 0 \leqslant \theta \leqslant \pi. \qquad (3)$$

La solución del problema de contorno (1), (2), (3) se puede representar en la forma

$$u(r, \theta, t) = \left\{\frac{r^n f(t)}{nr_0^{n-1}} + \sum_{k=1}^{+\infty} \psi_k(t) \frac{J_{n+\frac{1}{2}}\left(\frac{\mu_k^{(n)}r}{r_0}\right)}{\sqrt{r}}\right\} P_n(\cos\theta), \qquad (4)$$

donde $\mu_k^{(n)}$ son las raíces positivas de la ecuación

$$\mu J'_{n+\frac{1}{2}}(\mu) - \frac{1}{2} J_{n+\frac{1}{2}}(\mu) = 0, \qquad (5)$$

$$\psi_k(t) = \frac{r_0 A_k}{a\mu_k^{(n)}} \int\limits_0^t f''(\tau) \operatorname{sen} \frac{a\mu_k^{(n)}}{r_0}(t-\tau)\, d\tau, \quad k = 1, 2, 3, \ldots \qquad (6)$$

$$A_k = -\frac{1}{nr_0^{n-1}} \frac{\int\limits_0^{r_0} r^{n+\frac{3}{2}} J_{n+\frac{1}{2}}\left(\frac{\mu_k^{(n)}r}{r_0}\right) dr}{nr_0^{n-1}\frac{r_0^2}{2} J^2_{n+\frac{1}{2}}(\mu_k^{(n)})\left[1-\frac{n(n+1)}{\mu_k^{(n)2}}\right]}, \quad k = 1, 2, 3, \ldots \qquad (7)$$

12

97. $$u(r, \theta, t)=\left\{\sum_{n=1}^{+\infty} A_n \frac{J_{n+\frac{1}{2}}\left(\frac{\omega r}{a}\right)}{\sqrt{r}} P_n(\cos\theta)\right\}\cos\omega t+$$

$$+\sum_{n,\,k=1}^{+\infty} A_{nk} \frac{J_{n+\frac{1}{2}}\left(\frac{\mu_k^{(n)} r}{r_0}\right)}{\sqrt{r}} P_n(\cos\theta)\cos\frac{a\mu_k^{(n)} t}{r_0}, \qquad (1)$$

$$A_n=\frac{2n+1}{2R'_n(r_0)}\int_0^{\pi} f(\theta)\,P_n(\cos\theta)\,\operatorname{sen}\theta\,d\theta,$$

$$R_n(r)=\frac{J^{n+\frac{1}{2}}\left(\frac{\omega r}{a}\right)}{\sqrt{r}}, \quad n=0,\,1,\,2,\,\ldots, \qquad (2)$$

$$A_{nk}=\frac{A_n\int_0^{r_0} rJ_{n+\frac{1}{2}}\left(\frac{\omega r}{a}\right)J_{n+\frac{1}{2}}\left(\frac{\mu_k^{(n)} r}{r_0}\right)dr}{\frac{r_0^2}{2}J^2_{n+\frac{1}{2}}(\mu_k^{(n)})\left[1-\frac{n(n+1)}{\mu_k^{(n)2}}\right]},$$

$$k=1,\,2,\,3,\,\ldots, \quad n=0,\,1,\,2,\,3,\,\ldots, \qquad (3)$$

donde $\mu_k^{(n)}$ son las raíces positivas de la ecuación

$$\mu J'_{n+\frac{1}{2}}(\mu)-\frac{1}{2}J_{n+\frac{1}{2}}(\mu)=0. \qquad (4)$$

98. El potencial de las velocidades de las partículas del gas es la solución del problema de contorno

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\left\{\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial u}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2\operatorname{sen}\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\operatorname{sen}\theta\frac{\partial u}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{r^2\operatorname{sen}^2\theta}\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2}\right\}, \quad (1)$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial r}\right|_{r=r_0}=AP_n^m(\cos\theta)\cos m\varphi\cos\omega t, \qquad (2)$$

$$u|_{t=0}=u_t|_{t=0}=0, \qquad (3)$$

La solución del problema de contorno (1), (2), (3), se puede representar en la forma

$$u(r,\ \theta,\ \varphi,\ t)=\left\{\frac{Ar_0^{\frac{3}{2}}J_{n+\frac{1}{2}}\left(\frac{\omega r}{a}\right)\cos\omega t}{\left[\frac{\omega r_0}{a}J'_{n+\frac{1}{2}}\left(\frac{\omega r_0}{a}\right)-J_{n+\frac{1}{2}}\left(\frac{\omega r_0}{a}\right)\right]\sqrt{r}}+\right.$$

$$\left.+\sum_{k=1}^{+\infty}A_k\frac{J_{n+\frac{1}{2}}\left(\frac{\mu_k r}{r_0}\right)}{\sqrt{r}}\cos\frac{a\mu_k t}{r_0}\right\}P_n^m(\cos\theta)\cos m\varphi, \qquad (4)$$

donde μ_k son las raíces positivas de la ecuación

$$\mu J'_{n+\frac{1}{2}}(\mu)-\frac{1}{2}J_{n+\frac{1}{2}}(\mu)=0, \qquad (5)$$

$$A_k=-\frac{Ar_0^{\frac{3}{2}}\int\limits_0^{r_0}rJ_{n+\frac{1}{2}}\left(\frac{\omega r}{a}\right)J_{n+\frac{1}{2}}\left(\frac{\mu_k r}{a}\right)dr}{\left[\frac{\omega r_0}{a}J'_{n+\frac{1}{2}}\left(\frac{\omega r_0}{a}\right)-J_{n+\frac{1}{2}}\left(\frac{\omega r_0}{a}\right)\right]\frac{r_0^2}{2}J^2_{n+\frac{1}{2}}(\mu_k)\left[1-\frac{n(u+1)}{\mu_k^2}\right]},$$

$$k=1,\ 2,\ \ldots \qquad (6)$$

99. $$u(r,\ \theta,\ \varphi,\ t)=\cos m\varphi\cos\omega t\sum_{n=m}^{+\infty}A_n\frac{J_{n+\frac{1}{2}}\left(\frac{\omega r}{a}\right)}{\sqrt{r}}\times$$

$$\times P_n^m(\cos\theta)+\cos m\varphi\sum_{n=m}^{+\infty}\sum_{k=1}^{+\infty}A_{nk}\frac{J_{n+\frac{1}{2}}\left(\frac{\mu_k^{(n)}r}{r_0}\right)}{\sqrt{r}}\times$$

$$\times P_n^m(\cos\theta)\cos\frac{a\mu_k^{(n)}t}{r_0}, \qquad (1)$$

donde $\mu_k^{(n)}$ son las raíces positivas de la ecuación

$$\mu J'_{n+\frac{1}{2}}(\mu)-\frac{1}{2}J_{n+\frac{1}{2}}(\mu)=0, \qquad (2)$$

$$A_n=\frac{r_0^{\frac{3}{2}}\int\limits_0^{\pi}f(\theta)P_n^m(\cos\theta)\operatorname{sen}\theta\,d\theta}{\frac{2}{2n+1}\frac{(n+m)!}{(n-m)!}\left[\frac{\omega r_0}{a}J'_{n+\frac{1}{2}}\left(\frac{\omega r_0}{a}\right)-\frac{1}{2}J_{n+\frac{1}{2}}\left(\frac{\omega r_0}{a}\right)\right]},\quad n\geqslant m,$$

$$(3)$$

$$A_{nk}=-\frac{A_n\int\limits_0^{r_0} rJ_{n+\frac{1}{2}}\left(\frac{\omega r}{a}\right)J_{n+\frac{1}{2}}\left(\frac{\mu_k^{(n)}r}{r_0}\right)dr}{\frac{r_0^2}{2}J^2_{n+\frac{1}{2}}(\mu_k^{(n)})\left[1-\frac{n(n+1)}{\mu_k^{(n)2}}\right]},\quad n\geqslant m,\quad k=1,\ 2,\ \ldots \tag{4}$$

100. El potencial de las velocidades de las partículas del gas es la solución del problema de contorno

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\left\{\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial u}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2\operatorname{sen}\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\operatorname{sen}\theta\frac{\partial u}{\partial\theta}\right)+\right.$$
$$\left.+\frac{1}{r^2\operatorname{sen}^2\theta}\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2}\right\}, \tag{1}$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial r}\right|_{r=r_0}=f(t)\,P_n^m(\cos\theta)\cos m\varphi,\quad f(0)=f'(0)=0, \tag{2}$$

$$u|_{t=0}=u|_{t=0}=0. \tag{3}$$

La solución del problema de contorno (1), (2), (3) se puede representar en la forma

$$u(r,\ \theta,\ t)=\left\{\frac{r^n f(t)}{nr_0^{n-1}}+\sum_{k=1}^{+\infty}\psi_k(t)\frac{J_{n+\frac{1}{2}}\left(\frac{\mu_k^{(n)}r}{r_0}\right)}{\sqrt{r}}\right\}P_n^m(\cos\theta)\cos m\varphi, \tag{4}$$

donde $\mu_k^{(n)}$ son las raíces positivas de la ecuación

$$\mu J'_{n+\frac{1}{2}}(\mu)-\frac{1}{2}J_{n+\frac{1}{2}}(\mu)=0. \tag{5}$$

$$\psi_k(t)=\frac{r_0A_k}{a\mu_k^{(n)}}\int\limits_0^t f''(\tau)\operatorname{sen}\frac{a\mu_k^{(n)}}{r_0}(t-\tau)\,d\tau,\quad k=1,\ 2,\ 3,\ \ldots, \tag{6}$$

$$A_k=-\frac{1}{nr_0^{n-1}}\cdot\frac{\int\limits_0^{r_0} r^{n+\frac{3}{2}}J_{n+\frac{1}{2}}\left(\frac{\mu_k^{(n)}r}{r_0}\right)dr}{\frac{r_0^2}{2}J^2_{n+\frac{1}{2}}(\mu_k^{(n)})\left[1-\frac{n(n+1)}{\mu_k^{(n)2}}\right]},\quad k=1,\ 2,\ 3,\ \ldots \tag{7}$$

101. $$u(r,\ \theta,\ t)=\left\{\sum_{k=1}^{+\infty}A_k\frac{\alpha_kJ_{\frac{3}{2}}(\lambda_kr)-\beta_kN_{\frac{3}{2}}(\lambda_kr)}{\sqrt{r}}\cos a\lambda_kt\right\}\cos\theta, \tag{1}$$

donde λ_k son las raíces positivas de la ecuación

$$\left[\lambda r_1 J'_{\frac{3}{2}}(\lambda r_1)-\frac{1}{2}J_{\frac{3}{2}}(\lambda r_1)\right]\left[\lambda r_2 N'_{\frac{3}{2}}(\lambda r_2)-\frac{1}{2}N_{\frac{3}{2}}(\lambda r_2)\right]-$$

$$-\left[\lambda r_2 J'_{\frac{3}{2}}(\lambda r_2)-\frac{1}{2}J_{\frac{3}{2}}(\lambda r_2)\right]\left[\lambda r_1 N'_{\frac{3}{2}}(\lambda r_1)-\frac{1}{2}N_{\frac{3}{2}}(\lambda r_1)\right]=0, \quad (2)$$

$$\alpha_k=\lambda_k r_1 N'_{\frac{3}{2}}(\lambda_k r_1)-\frac{1}{2}N_{\frac{3}{2}}(\lambda_k r_1), \quad \beta_k=\lambda_k r_2 J'_{\frac{3}{2}}(\lambda_k r_2)-\frac{1}{2}J_{\frac{3}{2}}(\lambda_k r_2), \quad (3)$$

$$A_k=\frac{v\int\limits_{r_1}^{r_2} r^{\frac{5}{2}}\left[\alpha_k J_{\frac{3}{2}}(\lambda_k r)-\beta_k N_{\frac{3}{2}}(\lambda_k r)\right]dr}{\int\limits_{r_1}^{r_2} r\left[\alpha_k J_{\frac{3}{2}}(\lambda_k r)-\beta_k N_{\frac{3}{2}}(\lambda_k r)\right]^2 dr}, \quad k=1,\ 2,\ 3\ \ldots \quad (4)$$

102. $$u(r,\ \theta,\ t)=\left\{\frac{\alpha J_{\frac{3}{2}}\left(\frac{\omega r}{a}\right)-\beta N_{\frac{3}{2}}\left(\frac{\omega r}{a}\right)}{\sqrt{r}}\cos\omega t+\right.$$

$$\left.+\sum_{k=1}^{+\infty} A_k\frac{\alpha_k J_{\frac{3}{2}}(\lambda_k r)-\beta_k N_{\frac{3}{2}}(\lambda_k r)}{\sqrt{r}}\cos a\lambda_k t\right\}\cos\theta, \quad (1)$$

donde λ_k, α_k, β_k, tienen los mismos significados que en la respuesta al problema anterior,

$$\alpha=\omega A\,\frac{r_1^{\frac{3}{2}}\left[\frac{\omega r_2}{a}N'_{\frac{3}{2}}\left(\frac{\omega r_2}{a}\right)-\frac{1}{2}J_{\frac{3}{2}}\left(\frac{\omega r_2}{a}\right)\right]-r_2^{\frac{3}{2}}\left[\frac{\omega r_1}{a}J'_{\frac{3}{2}}\left(\frac{\omega r_1}{a}\right)-\frac{1}{2}J_{\frac{3}{2}}\left(\frac{\omega r_1}{a}\right)\right]}{W(\omega,\ a,\ r_1,\ r_2)}, \quad (2)$$

$$\beta=\omega A\,\frac{r_1^{\frac{3}{2}}\left[\frac{\omega r_2}{a}J'_{\frac{3}{2}}\left(\frac{\omega r_2}{a}\right)-\frac{1}{2}N_{\frac{3}{2}}\left(\frac{\omega r_2}{a}\right)\right]-r_2^{\frac{3}{2}}\left[\frac{\omega r_1}{a}N'_{\frac{3}{2}}\left(\frac{\omega r_1}{a}\right)-\frac{1}{2}N_{\frac{3}{2}}\left(\frac{\omega r_1}{a}\right)\right]}{W(\omega,\ a,\ r_1,\ r_2)}, \quad (3)$$

$$W(\omega, a, r_1, r_2)=$$

$$=\begin{vmatrix} \left[\frac{\omega r_1}{a} J'_{\frac{3}{2}}\left(\frac{\omega r_1}{a}\right)-\frac{1}{2} J_{\frac{3}{2}}\left(\frac{\omega r_1}{a}\right)\right]\times \\ \times\left[\frac{\omega r_1}{a} N'_{\frac{3}{2}}\left(\frac{\omega r_1}{a}\right)-\frac{1}{2} N_{\frac{3}{2}}\left(\frac{\omega r_1}{a}\right)\right] \\ \left[\frac{\omega r_2}{a} J'_{\frac{3}{2}}\left(\frac{\omega r_2}{a}\right)-\frac{1}{2} J_{\frac{3}{2}}\left(\frac{\omega r_2}{a}\right)\right]\times \\ \times\left[\frac{\omega r_2}{a} N'_{\frac{3}{2}}\left(\frac{\omega r_2}{a}\right)-\frac{1}{2} N_{\frac{3}{2}}\left(\frac{\omega r_2}{a}\right)\right] \end{vmatrix}, \quad (4)$$

$$A_k=-\frac{\int_{r_1}^{r_2} r\left[\alpha J_{\frac{3}{2}}\left(\frac{\omega r}{a}\right)-\beta N_{\frac{3}{2}}\left(\frac{\omega r}{a}\right)\right]\left[\alpha_k J_{\frac{3}{2}}(\lambda_k r)-\beta_k N_{\frac{3}{2}}(\lambda_k r)\right] dr}{\int_{r_1}^{r_2} r\,[\alpha_k J_{\frac{3}{2}}(\lambda_k r)-\beta_k N_{\frac{3}{2}}(\lambda_k r)]^2\, dr}. \quad (5)$$

b) Medios heterogéneos

103. La solución del problema de contorno

$$\rho_1 \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2}=T_0\left\{\frac{\partial^2 u_1}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial u_1}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u_1}{\partial \varphi^2}\right\}, \quad 0\leqslant r\leqslant r_1, \quad 0\leqslant\varphi\leqslant 2\pi, \quad (1)$$

$$\rho_2 \frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2}=T_0\left\{\frac{\partial^2 u_2}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial u_2}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u_2}{\partial \varphi^2}\right\}, \quad r_1\leqslant r\leqslant r_2, \quad 0<t<+\infty, \quad (1')$$

$$u(r_1-0, \varphi, t)=u(r_1+0, \varphi, t), \quad 0\leqslant\varphi\leqslant 2\pi, \quad (2)$$

$$u_r(r_1-0, \varphi, t)=u_r(r_1+0, \varphi, t), \quad 0<t<+\infty, \quad (2')$$

$$u(r_2, \varphi, t)=0, \quad (2'')$$

$$u(r, \varphi, 0)=f(r, \varphi), \quad u_t(r, \varphi, 0)=F(r, \varphi), \quad 0\leqslant r\leqslant r_2, \quad 0\leqslant\varphi<2\pi, \quad (3)$$

es

$$u(r, \varphi, t)=\sum_{m,\,n=1}^{+\infty} R_{mn}(r)\{[\bar{a}_{mn}\cos n\varphi+\bar{b}_{mn}\operatorname{sen} n\varphi]\cos\lambda_{mn}t+$$
$$+[\bar{\bar{a}}_{mn}\cos n\varphi+\bar{\bar{b}}_{mn}\operatorname{sen} n\varphi]\operatorname{sen}\lambda_{mn}t\}, \quad (4)$$

donde λ_{mn} son las raíces de la ecuación trascedente

$$\begin{vmatrix} J_n(\bar{\omega}r_1) & N_n(\bar{\bar{\omega}}r_1) & J_n(\bar{\bar{\omega}}r_1) \\ \bar{\omega}J'_n(\bar{\omega}r_1) & \bar{\bar{\omega}}N'_n(\bar{\bar{\omega}}r_1) & \omega J'_n(\bar{\bar{\omega}}r_1) \\ 0 & N_n(\bar{\bar{\omega}}r_2) & J_n(\bar{\bar{\omega}}r_2) \end{vmatrix}=0, \quad (5)$$

$$\overline{\omega}=\frac{\rho_1\lambda}{T_0}, \qquad \overline{\overline{\omega}}=\frac{\rho_2\lambda}{T_0}, \tag{6}$$

$$R_{mn}(r)=\begin{cases} [J_n(\overline{\overline{\omega}}_{mn}r_1)N_n(\overline{\overline{\omega}}_{mn}r_2)-N_n(\overline{\overline{\omega}}_{mn}r_1)J_n(\overline{\overline{\omega}}_{mn}r_2)]\,J_n(\overline{\omega}_{mn}r), \\ \qquad 0\leqslant r\leqslant r_1, \\ [J_n(\overline{\overline{\omega}}_{mn}r)N_n(\overline{\overline{\omega}}_{mn}r_2)-N_n(\overline{\overline{\omega}}_{mn}r)J_n(\overline{\overline{\omega}}_{mn}r_2)]\,J_n(\overline{\omega}_{mn}r_1), \\ \qquad r_1\leqslant r\leqslant r_2, \end{cases} \tag{7}$$

$$\overline{a}_{mn}=\frac{\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^{r_2}\mu(r)f(r,\varphi)R_{mn}(r)\cos n\varphi\,dr}{\varepsilon_n\pi\int_0^{r_2}\mu(r)R_{mn}^2(r)\,dr},$$

$$\varepsilon_n=\begin{cases}1 & \text{para} \quad n\neq 0,\\ 2 & \text{para} \quad n=0,\end{cases} \tag{8}$$

$$\overline{b}_{mn}=\frac{\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^{r_2}\mu(r)f(r,\varphi)R_{mn}(r)\,\text{sen}\,n\varphi\,dr}{\pi\int_0^{r_2}\mu(r)R_{mn}^2(r)\,dr}. \tag{9}$$

Las fórmulas para $\overline{\overline{a}}_{mn}$ y $\overline{\overline{b}}_{mn}$ se obtienen de las fórmulas (8) y (9) mediante la sustitución de la función subintegral $f(r,\varphi)$ por $F(r,\varphi)$ y la adición del factor $\lambda_{m,n}$ en el denominador.

§ 4. Método de las representaciones integrales

1. Utilización de la integral de Fourier

a) Transformación de Fourier

Recordemos que la imagen de Fourier de la función $F(x, y)$ con respecto al núcleo $e^{i(\lambda\xi+\mu\eta)}$ se llama a la función

$$\overline{F}(\lambda,\mu)=\frac{1}{2\pi}\iint\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{i(\lambda\xi+\mu\eta)}F(\xi,\eta)\,d\xi\,d\eta. \tag{I}$$

El original se reconstruye según la imagen mediante la fórmula de inversión

$$F(x,y)=\frac{1}{2\pi}\iint\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-i(\lambda x+\mu y)}\overline{F}(\lambda,\mu)\,d\lambda\,d\mu. \tag{II}$$

Análogamente se determina la transformación de Fourier en el espacio*).

---

*) Para más detalles véase el cap. V, § 3.

104. *Resolución.* Utilizando la transformación de Fourier de la forma (I) a la ecuación (1) y las condiciones iniciales (2) del problema en examen, obtenemos la ecuación diferencial ordinaria y las condiciones iniciales

$$\frac{d^2\overline{u}(\lambda,\ \mu,\ t)}{dt^2}+a^2(\lambda^2+\mu^2)\overline{u}(\lambda,\ \mu,\ t)=0. \tag{1}$$

$$\overline{u}(\lambda,\ \mu,\ 0)=\overline{\Phi}(\lambda,\ \mu),\quad \frac{d\overline{u}(\lambda,\ \mu,\ 0)}{dt}=\overline{\Psi}(\lambda,\ \mu), \tag{2}$$

donde $\overline{u}$, $\overline{\Phi}$, $\overline{\Psi}$ son las imágenes de Fourier de las funciones u, $\overline{\Phi}$, Ψ. La solución de la ecuación (1) con las condiciones iniciales (2) se escribe en la forma

$$\overline{u}=\overline{\Phi}(\lambda,\ \mu)\cos a\rho t+\overline{\Psi}(\lambda,\ \mu)\frac{\operatorname{sen} a\rho t}{a\rho},\quad \rho=\sqrt{\lambda^2+\mu^2}. \tag{3}$$

Utilizando la transformación inversa de Fourier, hallamos

$$u(x,\ y,\ t)=\frac{1}{2\pi}\left\{\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int \overline{\Phi}(\lambda,\ \mu)\cos a\rho t e^{-i(\lambda x+\mu y)}\,d\lambda\,d\mu+\right.$$

$$\left.+\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int \overline{\Psi}(\lambda,\ \mu)\frac{\operatorname{sen} a\rho t}{a\rho}e^{-i(\lambda x+\mu y)}\,d\lambda\,d\mu\right\}. \tag{4}$$

Sustituyendo los valores de $\overline{\Phi}(\lambda,\ \mu)$ y $\overline{\Psi}(\lambda,\ \mu)$, llegamos a la igualdad

$$u(x,\ y,\ t)=\frac{1}{(2\pi)^2}\int\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\int\left\{\Phi(\xi,\ \eta)\cos a\rho t+\right.$$

$$\left.+\Psi(\xi,\ \eta)\frac{\operatorname{sen} a\rho t}{a\rho}\right\}e^{i[\lambda(x-\xi)+\mu(y-\eta)]}\,d\xi\,d\eta\,d\lambda\,d\mu, \tag{5}$$

donde

$$\rho=\sqrt{\lambda^2+\mu^2}.$$

Introducimos las coordenadas polares mediante las relaciones

$$\left.\begin{aligned}\xi-x&=r\cos\varphi, & \lambda&=\rho\cos\theta,\\ \eta-y&=r\operatorname{sen}\varphi, & \mu&=\rho\operatorname{sen}\theta,\end{aligned}\right\} \tag{6}$$

obtenemos: $\lambda(\xi-x)+\mu(\eta-y)=\rho r\cos(\theta-\varphi)=\rho r\cos\varphi'$, donde φ' es el ángulo medido como se indica en la fig. 54.

A los primeros dos sumandos del segundo miembro de la igualdad (5) los indicamos respectivamente por $u_1(x,\ y,\ t)$ y $u_2(x,\ y,\ t)$. En virtud de (6) tendremos

$$u_2(x,\ y,\ t)=\frac{1}{(2\pi)^2}\int\limits_0^{+\infty}\int\limits_0^{+\infty}\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\Psi(\xi,\ \eta)\frac{\operatorname{sen} a\rho t}{a\rho}e^{i\rho r\cos\varphi'}\rho r\,dr\,d\rho\,d\varphi\,d\varphi'. \tag{7}$$

En virtud de la igualdad *)

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{i\rho r \cos \varphi'} \, d\varphi' = J_0(\rho r) \qquad (8)$$

de (7) obtenemos:

$$u_2(x, y, t) = \frac{1}{2\pi a} \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} \int_0^{2\pi} \Psi(\xi, \eta) \operatorname{sen} a\rho t J_0(\rho r) \, r dr \, d\rho \, d\varphi. \qquad (9)$$

Pero **)

$$\int_0^{+\infty} J_0(\rho r) \operatorname{sen} a\rho t \, d\rho = \begin{cases} 0 & \text{para} \quad at < r, \\ \dfrac{1}{\sqrt{a^2t^2 - r^2}} & \text{para} \quad at > r, \end{cases} \qquad (10)$$

por_eso

$$u_2(x, y, t) = \frac{1}{2\pi a} \int_0^{at} \int_0^{2\pi} \frac{\Psi(\xi, \eta) \, r \, dr \, d\varphi}{\sqrt{a^2t^2 - r^2}}; \qquad (11)$$

u_1 se puede obtener de u_2 mediante la diferenciación respecto a t, si pre-

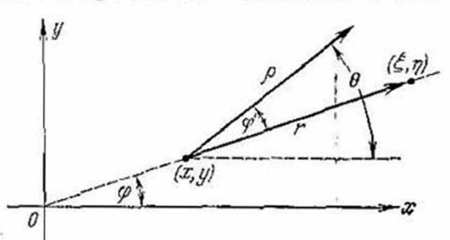


Fig. 54

viamente sustituimos $\Psi(\xi, \eta)$ por $\Phi(\xi, \eta)$. De esta manera

$$u(x, y, t) = \frac{1}{2\pi a} \frac{\partial}{\partial t} \int_0^{at} \int_0^{2\pi} \frac{\Phi(\xi, \eta) \, r \, dr \, d\varphi}{\sqrt{a^2t^2 - r^2}} + \\ + \frac{1}{2\pi a} \int_0^{at} \int_0^{2\pi} \frac{\Psi(\xi, \eta) \, r \, dr \, d\varphi}{\sqrt{a^2t^2 - r}}, \qquad (12)$$

$$r = \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2}.$$

---

*) Véase [7], pág. 741, (13′).
**) Véase [7], pág. 751 (12) y (13).

105. *Resolución.* Utilizando la transformación de Fourier análogamente como esto se hizo en la solución del problema anterior, obtenemos

$$u(x, y, z, t) = u_1(x, y, z, t) + u_2(x, y, z, t), \tag{1}$$

donde

$$u_1(x, y, z, t) = \frac{1}{(2\pi)^3} \iiint\!\!\!\iiint_{-\infty}^{+\infty} \Phi(\xi, \eta, \zeta) \cos a\rho t \times$$

$$\times e^{-i[\lambda(x-\xi)+\mu(y-\eta)+\nu(z-\zeta)]}\, d\xi\, d\eta\, d\zeta\, d\lambda\, d\mu\, d\nu, \tag{2}$$

$$u_2(x, y, z, t) = \frac{1}{(2\pi)^3} \iiint\!\!\!\iiint_{-\infty}^{+\infty} \Psi(\xi, \eta, \zeta) \frac{\operatorname{sen} a\rho t}{a\rho} \times$$

$$\times e^{i[\lambda(x, \xi)+\mu(y-\eta)+\nu(z-\zeta)]}\, d\xi\, d\eta\, d\zeta\, d\lambda\, d\mu\, d\nu \tag{3}$$

$(\rho = \sqrt{\lambda^2+\mu^2+\nu^2})$. Pasando a las coordenadas polares según las fórmulas

$$\begin{aligned} &\xi - x = r \operatorname{sen}\theta \cos\varphi, \quad \eta - y = r \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\varphi, \quad \zeta - z = r\cos\theta, \\ &\lambda = \rho \operatorname{sen}\theta' \cos\varphi', \quad \mu = \rho \operatorname{sen}\theta' \operatorname{sen}\varphi', \quad \nu = \rho\cos\theta', \end{aligned} \tag{4}$$

donde θ es el ángulo entre el sentido positivo del eje z y el vector $\boldsymbol{r} = (\xi - x)\,\boldsymbol{i} + (\eta - y)\,\boldsymbol{j} + (\zeta - z)\,\boldsymbol{k}y\theta'$, el ángulo entre $\boldsymbol{r}$ y $\boldsymbol{\rho} = \lambda\boldsymbol{i} + \mu\boldsymbol{j} + \nu\boldsymbol{k}$ (fig. 55), es decir, tomando el sentido del eje z por el sentido positivo del

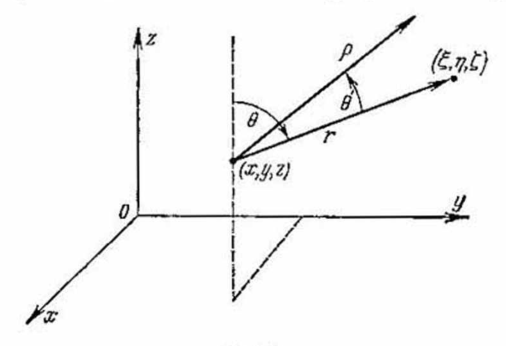


Fig. 55

eje polar en el sistema esférico de coordenadas, obtenemos:

$$u_2 = \frac{1}{(2\pi)^3} \int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty}\int_0^{\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} \Psi(x + r\operatorname{sen}\theta\cos\varphi,\ y + r\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\varphi,\ r\cos\theta) \times$$

$$\times \frac{\operatorname{sen} a\rho t}{a\rho} e^{i\rho r\cos\theta'} \rho^2 r^2 \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\theta'\, d\rho\, dr\, d\theta\, d\theta'\, d\varphi\, d\varphi'.$$

La realización de la integración respecto a φ' y θ' da

$$u_2=\frac{1}{2\pi^2 a}\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}\Psi(x+r\operatorname{sen}\theta\cos\varphi,\ y+r\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\varphi,\ z+r\cos\theta)\times$$

$$\times\operatorname{sen}\rho r\operatorname{sen}a\rho t\ \ r\operatorname{sen}\theta\, d\rho\, dr\, d\theta\, d\varphi=$$

$$=\frac{1}{4\pi^2 a}\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}\Psi(x+r\operatorname{sen}\theta\cos\varphi,\ y+r\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\varphi,\ z+r\cos\theta)\times$$

$$\times\{\cos\rho(r-at)-\cos\rho(r+at)\}\, r\operatorname{sen}\theta\, dr\, d\rho\, d\theta\, d\varphi.$$

La integral

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty}d\rho\int_0^{+\infty}r\Psi(x+r\operatorname{sen}\theta\cos\varphi,\ y+r\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\varphi,\ z+r\cos\theta)\cos\rho(r-at)\,dr \tag{5}$$

se puede calcular mediante la integral de Fourier

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty}d\rho\int_0^{+\infty}f(r)\cos\rho(r-at)\,dr=f(at),$$

suponiendo

$$f(r)=\begin{cases} r\Psi(x+r\operatorname{sen}\theta\cos\varphi,\ y+r\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\varphi,\ z+r\cos\theta) & \text{para}\quad r\geqslant 0,\\ 0 & \text{para}\quad r\leqslant 0.\end{cases}$$

Si $f(r)$ satisface las condiciones de la posibilidad del desarrollo en la integral de Fourier y es continua, entonces la integral (5) es igual a cero para $t\leqslant 0$ y

$$at\Psi(x+at\operatorname{sen}\theta\cos\varphi,\ y+at\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\varphi,\ z+at\cos\theta)\ \text{ para }\ t\geqslant 0.$$

Análogamente

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty}d\rho\int_0^{+\infty}r\Psi(x+r\operatorname{sen}\theta\cos\varphi,\ y+r\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\varphi,\ z+r\cos\theta)\cos\rho(r+at)\,dr=$$

$$=\begin{cases} -at\Psi(x-at\operatorname{sen}\theta\cos\varphi,\ y-at\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\varphi,\ z-at\cos\theta) & \text{para}\quad t\leqslant 0,\\ 0 & \text{para}\quad t\geqslant 0.\end{cases}$$

De esta manera

$$u_2(x,\ y,\ z,\ t)=\frac{t}{4\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}\Psi(x+at\operatorname{sen}\theta\cos\varphi,\ y+at\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\varphi,\ z+$$

$$+at\cos\theta)\operatorname{sen}\theta\, d\theta\, d\varphi,$$

$u_1(x, y, z, t)$ puede ser obtenida de $u_2(x, y, z, t)$ mediante la diferenciación con respecto a t después de la sustitución previa de Ψ por Φ:

$$u_1(x, y, z, t)=\frac{\partial}{\partial t}\left\{\frac{t}{4\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}\Phi(x+at\,\mathrm{sen}\,\theta\cos\varphi,\ y+at\times\right.$$

$$\left.\times\,\mathrm{sen}\,\theta\,\mathrm{sen}\,\varphi,\ z+at\cos\theta)\,\mathrm{sen}\,\theta\,d\theta\,d\varphi\right\}.$$

106. $$u(x, y, t)=\frac{1}{2\pi a}\int_0^t d\tau\iint\limits_{r\leqslant a(t-\tau)}\frac{f(\xi, \eta, \tau)}{\sqrt{a^2(t-\tau)-r^2}}\,d\xi\,d\eta,$$
$$r=\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2}. \qquad (1)$$

107. $$u(x, y, z, t)=\frac{1}{4\pi a^2}\iiint\limits_{r\leqslant at}\frac{f\left(\xi, \eta, \zeta, t-\frac{r}{a}\right)}{r}\,d\xi\,d\eta\,d\zeta, \qquad (1)$$
$$r=\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2}.$$

Pasando a las coordenadas esféricas como en el problema anterior, realizar la integración con respecto a φ', θ', ρ y r.

108. $$u(x, y, t)=\frac{1}{\pi}\iint\limits_{-\infty}^{+\infty}\Phi(x+2\tilde{\xi}\sqrt{bt},\ y+2\tilde{\eta}\sqrt{bt})\,\mathrm{sen}\,t(\tilde{\xi}^2+\tilde{\eta}^2)\,d\tilde{\xi}\,d\tilde{\eta}+$$
$$+\frac{1}{\pi}\int_0^t dt\iint\limits_{-\infty}^{+\infty}\Psi(x+2\tilde{\xi}\sqrt{bt},\ y+2\tilde{\eta}\sqrt{bt})\,\mathrm{sen}\,t(\tilde{\xi}^2+\tilde{\eta}^2)\,d\tilde{\xi}\,d\tilde{\eta}. \qquad (1)$$

Indicación. Utilizando la transformación de Fourier, no es difícil obtener la expresión siguiente

$$u(x, y, t)=\frac{1}{(2\pi)^3}\iiiint\limits_{-\infty}^{+\infty}\Phi(\xi, \eta)\cos\lambda(x-\xi)\cos\mu(y-\eta)\times$$
$$\times\cos bt(\lambda^2+\mu^2)\,d\xi\,d\eta\,d\lambda\,d\mu+\frac{1}{(2\pi)^3}\int_0^t d\tau\iiiint\limits_{-\infty}^{+\infty}\Psi(\xi, \eta)\cos\lambda(x-\xi)\times$$
$$\times\cos\mu(y-\eta)\cos b\tau(\lambda^2+\mu^2)\,d\xi\,d\eta\,d\lambda\,d\mu, \qquad (2)$$

si tenemos en cuenta que las integrales análogas en las cuales en vez de $\cos\lambda(x-\xi)$ o $\cos\mu(y-\eta)$ están $\mathrm{sen}\,\lambda(x-\xi)$ o $\mathrm{sen}\,\mu(y-\eta)$, son iguales a cero. Las transformaciones ulteriores pueden ser realizadas mediante las igualdades

$$\left.\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty}\cos p\sigma^2\cos q\sigma\,d\sigma&=\sqrt{\frac{\pi}{p}}\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{q^2}{4p}\right),\\ \int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{sen}\,p\sigma^2\cos q\sigma\,d\sigma&=\sqrt{\frac{\pi}{p}}\,\mathrm{sen}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{q^2}{4p}\right),\end{aligned}\right\}\ p>0 \qquad (3)$$

y la sustitución de variables

$$\frac{\xi - x}{2\sqrt{bt}} = \tilde{\xi}, \quad \frac{\eta - y}{2\sqrt{bt}} = \tilde{\eta}. \tag{4}$$

Las igualdades (3) pueden ser obtenidas, por ejemplo, de las integrales de Fresnel

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \cos x^2\, dx = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \quad \text{y} \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \operatorname{sen} x^2\, dx = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \tag{5}$$

mediante el paso a la variables σ de integración según la fórmula

$$x = \sigma\sqrt{p} - \frac{q}{2\sqrt{p}}. \tag{6}$$

b) Transformación de Fourier-Bessel

Recordemos que la imagen de Fourier-Bessel de la función $f(r)$, $0 \leqslant r < +\infty$ respecto al núcleo $J_\nu(\lambda\xi)$*) se llama a la función

$$\bar{f}(\lambda) = \int_0^{+\infty} \xi f(\xi) J_\nu(\lambda\xi)\, d\xi. \tag{1}$$

El original se reconstruye según la imagen mediante la fórmula de inversión

$$f(r) = \int_0^{+\infty} \lambda\bar{f}(\lambda) J_\nu(\lambda r)\, d\lambda. \tag{2}$$

109. $$u(r, t) = \frac{A}{\sqrt{2}} \left\{ \frac{1}{\left[\left(1 + \frac{r^2 - a^2t^2}{b^2}\right) + 4\left(\frac{at}{b}\right)^2 \right]^{\frac{1}{2}}} + \frac{1 + \frac{r^2 - a^2t^2}{b^2}}{\left[\left(1 + \frac{r^2 - a^2t^2}{b^2}\right) + 4\left(\frac{at}{2}\right)^2 \right]} \right\}^{1/2}.$$

Indicación. Aplicando la transformación de Fourier—Bessel de orden nulo al problema de contorno

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} \right), \quad 0 < r,\ t < +\infty, \tag{1}$$

$$u(r, 0) = f(r), \quad u_t(r, 0) = g(r), \quad 0 \leqslant r < +\infty, \tag{2}$$

no es difícil obtener la expresión siguiente para su solución

$$u(r, t) = \int_0^{+\infty} \lambda\bar{f}(\lambda) \cos(a\lambda t) J_0(\lambda r)\, d\lambda + \frac{1}{a} \int_0^{+\infty} \bar{g}(\lambda) \operatorname{sen}(a\lambda t) J_0(\lambda r)\, d\lambda. \tag{3}$$

---

*) O, brevemente, la imagen de Fourier—Bessel de ν-ésimo orden.

En nuestro caso $u_t(r, 0) = g(r) = 0$, por consiguiente,

$$\bar{g}(\lambda) = 0, \quad f(r) = \frac{A}{\sqrt{1 + \frac{r^2}{b^2}}}.$$

Para $\bar{f}(\lambda)$ no es difícil obtener la expresión

$$\bar{f}(\lambda) = \frac{Ab}{\lambda} e^{-\lambda b}. \tag{4}$$

Para eso se debe utilizar la relación

$$\int_0^{+\infty} e^{-\omega x} J_0(\rho x)\, dx = \frac{1}{\sqrt{\rho^2 + \omega^2}} \text{ *)}$$

y la fórmula de inversión. La sustitución de (4) en (3) da:

$$u(r, t) = Ab \int_0^{+\infty} e^{-\lambda b} \cos(a\lambda t)\, J_0(\lambda r)\, d\lambda =$$

$$= \operatorname{Re}\left\{Ab \int_0^{+\infty} e^{-\lambda(b+iat)} J_0(\lambda r)\, d\lambda\right\}, \tag{5}$$

donde $\operatorname{Re}(p + qi) = p$ es la parte real del número complejo $p + qi$.

110. La solución del problema de contorno (1), (2) (véase el planteamiento del problema) es

$$u(r, t) = \frac{1}{2bt} \int_0^{+\infty} \rho f(\rho)\, J_0\left(\frac{\rho r}{2bt}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{\rho^2 + r^2}{4bt}\right) d\rho. \tag{1}$$

En particular, para $f(\rho) = Ae^{-\rho^2/a^2}$ obtenemos:

$$w(r, t) = \frac{Ae^{-\frac{R^2}{1+\tau^2}}}{1+\tau^2}\left(\cos\frac{R^2}{1+\tau^2} + \tau \operatorname{sen}\frac{R^2\tau}{1+\tau^2}\right), \tag{2}$$

donde

$$\tau = \frac{4bt}{a^2} \quad \text{y} \quad R = \frac{r}{a}. \tag{3}$$

Indicación. Para la imagen de Fourier—Bessel de orden nulo de la solución del problema de contorno (1), (2) (véase el planteamiento) obtenemos la expresión

$$\bar{u}(\lambda, t) = \cos(b\lambda^2 t) \int_0^{+\infty} \xi f(\xi)\, J_0(\lambda\xi)\, d\xi. \tag{4}$$

---

*) Véase [7], pág. 750.

Si, al emplear la fórmula de inversión, utilizamos la integral de Weber

$$\int_0^{+\infty} \xi J_0(\lambda\xi)\, J_0(\lambda r)\, e^{-p\xi^2}\, d\xi = \frac{1}{2p}\, e^{-\left(\frac{\lambda^2+r^2}{4p}\right)} J_0\left(\frac{\lambda r}{2p}\right), \qquad (5)$$

haciendo $p = -ibt$, entonces para $u(r, t)$ obtenemos la expresión (1). Si en (4) sustituimos $f(\xi) = Ae^{-\xi^2/a^2}$, entonces para $\bar{u}(\lambda, t)$ nos queda

$$\overline{u}(\lambda, t) = A\cos(b\lambda^2 t) \int_0^{+\infty} \xi e^{-\frac{\xi^2}{a^2}} J_0(\lambda\xi)\, d\xi = \frac{1}{2} Aa^2 e^{-\frac{1}{2}\lambda^2 a^2} \cos(bt\lambda^2), \qquad (6)$$

con eso se debe utilizar la integral de Hankel *)

$$\int_0^{+\infty} J_\nu(at)\, e^{-pt^2} t^{\mu-1}\, dt = \frac{a^\nu \Gamma\left(\frac{1}{2}\mu + \frac{1}{2}\nu\right)}{2^{\nu+1} p^{\frac{1}{2}\mu+\frac{1}{2}\nu}\, \Gamma(1+\nu)} \times$$

$$\times F_1\left(\frac{1}{2}\mu + \frac{1}{2}\nu;\ \nu+1;\ -\frac{a^2}{4p}\right)$$

para $\nu = 0$, $p = 1/a^2$, $\mu = 2$, $a = \lambda$.

Usando la fórmula de inversión y utilizando esa misma integral de Hankel para $\mu = 2$, $\nu = 0$, $a = r$ y

$$p = \frac{a^2}{4}\left(1 + \frac{4ibt}{a^2}\right)$$

obtenemos la expresión (2) para $u(r, t)$.

111. Si el punto $r = 0$ se mueve según la ley $u(0, t) = \varphi(t)$, $0 < t < +\infty$, entonces la expresión para $u(r, t)$ puede ser obtenida según la fórmula (1) de la respuesta al problema anterior, si en ella hacemos

$$f(r) = \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{\psi(t)}{t} \operatorname{sen}\left(\frac{r^2}{4bt}\right) dt.$$

Si $\psi(t)$ se da por las relaciones (1) (véase el planteamiento), entonces

$$f(r) = \frac{2At_0}{\pi}\left\{\frac{\pi}{2} - \operatorname{Si}\left(\frac{r^2}{4bt_0}\right) + \frac{r}{4bt_0} \operatorname{Ci}\left(\frac{r^2}{4bt_0}\right)\right\},$$

donde el seno integral y el coseno integral se determinan por las relaciones

$$\operatorname{Si}(x) = \int_0^x \frac{\operatorname{sen}\zeta}{\zeta}\, d\zeta, \quad \operatorname{Ci}(x) = -\int_x^{+\infty} \frac{\cos\zeta}{\zeta}\, d\zeta.$$

Indicación. Suponiendo en la igualdad (1) de la respuesta al problema anterior $r = 0$, obtenemos la ecuación integral para determinar $f(r)$. Si en ella suponemos $\rho = \sqrt{\xi}$, entonces ella se transforma en una ecuación integral que fácilmente se resuelve mediante la transformación seno de Fourier**).

*) Véase [42], apartado 393.

**) Sobre la definición de la transformación seno de Fourier véase el cap. II, § 4.

112. La ecuación de las vibraciones forzadas transversales de la placa*) para $p(r, t) = 16\rho hbf(r)\psi'(t)$ toma la forma

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + b^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\right)^2 u = 8bf(r)\psi'(t) \quad -\infty < t < +\infty, \quad 0 \leqslant r < +\infty.$$

Su solución es

$$u(r, t) = 4\int_{-\infty}^{t} \frac{\psi(\tau)\,d\tau}{t-\tau} \int_0^{+\infty} \rho f(\rho) \operatorname{sen}\left[\frac{\rho^2 + r^2}{4b(t-\tau)}\right] J_0\left(\frac{\rho r}{2b(t-\tau)}\right) d\rho. \qquad (1)$$

Para los casos particulares obtenemos las expresiones siguientes para $u(r, t)$:

a) $$u(r, t) = \frac{2}{\pi}\int_{-\infty}^{t} \psi(\tau) \operatorname{sen}\left[\frac{r^2}{4b(t-\tau)}\right]\frac{d\tau}{t-\tau};$$

b) $$u(r, t) = \frac{8b}{\pi a}\int_{-\infty}^{t} \psi(\tau)\,d\tau \int_0^{+\infty} J_0(\xi r) J_1(\xi a) \cos\left[b(t-\tau)\xi^2\right] d\xi;$$

c) $$u(r, t) = \frac{8\psi_0}{\pi ab}\int_0^{+\infty} J_0(\xi r) J_1(\xi a) \frac{1-\cos(bt\xi^2)}{\xi^4}\,d\xi;$$

si $r \ll a$, entonces para $t < t_0$

$$J_0\left(\frac{r\xi}{a}\right) = 1 - \frac{1}{4}\left(\frac{r}{a}\right)^2 \xi^2 + O\left(\frac{r^4}{a^4}\right)$$

y

$$u(r, t) \approx \frac{2\psi_0 t}{\pi}\left\{\frac{2bt}{a^2}\left[1 - \cos\left(\frac{a^2}{4bt}\right)\right] + \left(F\frac{a^2}{4bt}\right) + \frac{a^2}{8bt} G\left(\frac{a^2}{4bt}\right) - \right.$$
$$\left. - \frac{r^2}{4bt} G\left(\frac{a^2}{4bt}\right)\right\},$$

donde

$$F(x) = \frac{\pi}{2} - \operatorname{Si}(x) - x\operatorname{Ci}(x), \quad G(x) = \frac{\operatorname{sen} x}{x} - \operatorname{Ci}(x);$$

una expresión análoga se obtiene para $t > t_0$; si $r \gg a$, entonces

$$J_1\left(\frac{\xi a}{r}\right) \approx \frac{1}{2}\xi\frac{a}{r} - \frac{1}{16}\xi^3\left(\frac{a}{r}\right)^3$$

y

$$u(r, t) \approx \frac{2\psi_0 t}{\pi}\left[F\left(\frac{a^2}{4bt}\right) + \frac{a^2}{8bt}\operatorname{Ci}\left(\frac{r^2}{4bt}\right)\right], \quad 0 \leqslant t \leqslant t_0.$$

---

*) Véase el problema 18.

$$u(r, t) \approx \frac{2\psi_0}{\pi}\left\{ tF\left(\frac{r^2}{4bt}\right) - (t-t_0)\, F\left(\frac{r^2}{4b(t-t_0)}\right) + \right.$$

$$\left. + \frac{r^2}{8b}\operatorname{Ci}\left(\frac{r^2}{4bt}\right) - \frac{a^2}{8b}\operatorname{Ci}\left(\frac{r^2}{4b(t-t_0)}\right)\right\}, \qquad t_0 \leqslant t < +\infty;$$

d) $u(r, t) = A\int\limits_{-\infty}^{t} f(\tau)\, H(t-\tau)\, d\tau,$

donde

$$H(x) = \frac{2p^2 e^{-\frac{pq}{p^2+x^2}}}{c^2(p^2+x^2)}\left[\cos\left(\frac{qx}{p^2+x^2}\right) + \frac{x}{p}\operatorname{sen}\left(\frac{dx}{p^2+x^2}\right)\right],$$

$$p = \frac{c}{4b}, \qquad q = \frac{r}{4b},$$

e) $$\frac{\partial u(r, t)}{\partial t} = \frac{2Ap^2 e^{-\frac{pq}{p^2+t^2}}}{c^2(p^2+t^2)}\left[\cos\left(\frac{qt}{p^2+t^2}\right) + \frac{t}{p}\operatorname{sen}\left(\frac{qt}{p^2+t^2}\right)\right] = AH(t).$$

Indicación. En el caso a) hacer $f(r) = \dfrac{\delta(r)}{2\pi r}$, donde $\delta(r)$ es la función δ impulsiva de Dirac; en el caso c) primero hallar la imagen de Fourier—Bessel para $u(r, t)$

$$\bar{u}(\lambda, t) = \begin{cases} \dfrac{8\psi_0 b J_1(a\lambda)}{\pi a\lambda}\cdot\dfrac{1-\cos(b\lambda^2 t)}{b^2\lambda^4}, & 0 \leqslant t \leqslant t_0, \\ \dfrac{8\psi_0 b J_1(a\lambda)}{\pi a\lambda}\cdot\dfrac{\cos[b(t-t_0)\lambda^2] - \cos(bt\lambda^2)}{b^2\lambda^4}, & t_0 \leqslant t < +\infty, \end{cases}$$

y después utilizar la fórmula de inversión. Al deducir las fórmulas asintóticas emplear las integrales

$$\int\limits_0^{+\infty} J_1(x)\cos(bx^2)\, dx = 1 - \cos\left(\frac{1}{4b}\right), \qquad \int\limits_0^{+\infty} J_1(x)\operatorname{sen}(bx^2)\, dx = \operatorname{sen}\left(\frac{1}{4b}\right),$$

$$\int\limits_0^{+\infty} xJ_0(x)\cos(bx^2)\, dx = \frac{1}{2b}\operatorname{sen}\left(\frac{1}{4b}\right),$$

$$\int\limits_0^{+\infty} xJ_0(x)\operatorname{sen}(bx^2)\, dx = \frac{1}{2b}\cos\left(\frac{1}{4b}\right).$$

Las dos últimas integrales pueden ser obtenidas de la integral de Weber dado en la indicación al problema 110; en el caso d) se debe utilizar la citada integral de Weber.

2. Construcción y utilización de las funciones de influencia de los manantiales concentrados

a) Funciones de influencia de los impulsos instantáneos concentrados

113. $$\varkappa(x, y, z, t) = \frac{1}{4\pi a}\frac{\delta(r-at)}{r} = \frac{1}{4\pi a^2}\frac{\delta\left(t-\frac{r}{a}\right)}{r}\text{*)}, \qquad (1)$$

donde $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$.

En el caso cuando el impulso puntiforme instantáneo tiene lugar no en el origen de las coordenadas en el momento $t=0$ sino en el punto ξ, η, ζ en el momento $t=\tau$ la función de influencia toma la forma

$$\varkappa(x, y, z, \xi, \eta, \zeta, t-\tau) = \frac{1}{4\pi a^2}\cdot\frac{\delta\left(t-\tau-\frac{r}{a}\right)}{r}, \qquad (2)$$

donde $r=\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2}$.

Indicación. Se debe aprovechar el hecho de que **)

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty}\cos k(x-x_0)\,dk = \delta(x-x_0)$$

y también que $\delta(x+x_0)=0$ si x y $x_0>0$ simultáneamente. La expresión (2) se obtiene de (1) mediante la sustitución de x por $x-\xi$, . . ., t por $t-\tau$, lo que es legítimo dado que la ecuación $u_{tt}=a^2\Delta_2 u$ es invariante con respecto a esta sustitución.

114. $$\varkappa(x, y, z, \xi, \eta, \zeta, t-\tau) = \frac{1}{4\pi a^2}\left\{\frac{\delta\left(t-\tau-\frac{r}{a}\right)}{r} - \frac{c}{a}\frac{J_1\left(c\sqrt{(t-\tau)^2-\frac{r^2}{a^2}}\right)}{\sqrt{(t-\tau)^2-\frac{r^2}{a^2}}}\times\right.$$
$$\left.\times\sigma_0\left(t-\tau-\frac{r}{a}\right)\right\}, \qquad (1)$$

---

*) Se debe tener en cuenta que la función δ es par y que $\delta(x)=\frac{1}{\alpha}\delta\left(\frac{x}{\alpha}\right)$, donde α es una constante positiva arbitraria. La última afirmación se verifica mediante la integración con respecto a x entre $-\infty$ y $+\infty$.

**) Véase [7], pág. 304.

si en la ecuación inicial ante c^2u está el signo más y

$$\varkappa(x, y, z, \xi, \eta, \zeta, t-\tau)=$$

$$=\frac{1}{4\pi a^2}\left\{\frac{\delta\left(t-\tau-\frac{r}{a}\right)}{r}-\frac{c}{a}\frac{I_1\left(c\sqrt{(t-\tau)^2-\frac{r^2}{a^2}}\right)}{\sqrt{(t-\tau)^2-\frac{r^2}{a^2}}}\times\right.$$

$$\left.\times\sigma_0\left(t-\tau-\frac{r}{a}\right)\right\}, \tag{2}$$

si en la ecuación inicial ante c^2u está el signo menos;

$$r=\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2}.$$

Indicación. El problema se resuelve análogamente al anterior; primero se obtiene la expresión para la función de influencia del impulso instantáneo concentrado que tuviese lugar en el origen de las coordenadas $x=y=z=0$ en el momento $t=0$ y después al igual que en el problema anterior se realiza el paso al caso más general del impulso instantáneo concentrado en el punto ξ, η, ζ en el momento τ. La función

$$\sigma_0(x)=\begin{cases}0 & \text{para} \quad -\infty<x<0,\\ 1 & \text{para} \quad 0<x<+\infty\end{cases}$$

está vinculada a la función $\delta(x)$ por la correlación

$$\sigma_0'(x)=\delta(x).$$

115 *). $\varkappa(x, y, \xi, \eta, t-\tau)=\frac{1}{2\pi a}\frac{\sigma_0\left(t-\tau-\frac{r}{a}\right)}{\sqrt{a^2(t-\tau)^2-r^2}}$,

$$r=\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2}.$$

116 **). $\varkappa(x, y, \xi, \eta, t-\tau)=$

$$=\frac{1}{2\pi a}\cdot\frac{\sigma_0\left(t-\tau-\frac{r}{a}\right)}{\sqrt{a^2(t-\tau)^2-r^2}}\operatorname{ch}\left\{c\sqrt{(t-\tau)^2-\frac{r^2}{a^2}}\right\},$$

$$r=\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2},$$

si en la ecuación ante c^2u está el signo más; en el caso cuando en la ecuación ante c^2u está el signo menos, entonces en la respuesta se debe sustituir ch por cos.

---

*) Al igual que en los problemas 113 y 114 primero se obtiene la función de influencia del impulso instantáneo concentrado que tuviese lugar en el momento $t=0$ en el origen de las coordenadas y después se realiza el paso al impulso que tuviese lugar en un punto cualquiera en el momento arbitrario $t=\tau$.

**) Véase la llamada en la página anterior.

117. Primero examinamos la membrana rectangular.

1) para el primer problema de contorno, cuando $\varkappa = 0$ sobre la frontera del rectángulo

$$\varkappa(x, y, \xi, \eta, t-\tau) = \frac{4}{l_1 l_2} \sum_{m, n=1}^{+\infty} \operatorname{sen}\frac{m\pi x}{l_1} \operatorname{sen}\frac{n\pi y}{l_2} \times$$

$$\times \operatorname{sen}\frac{m\pi\xi}{l_1} \operatorname{sen}\frac{n\pi\eta}{l_2} \cdot \frac{\operatorname{sen}\left\{\pi a (t-\tau)\sqrt{\frac{m^2}{l_1^2}+\frac{n^2}{l_2^2}}\right\}}{\pi a\sqrt{\frac{m^2}{l_1^2}+\frac{n^2}{l_2^2}}}$$

2) para el segundo problema de contorno, cuando $\left.\frac{\partial\varkappa}{\partial x}\right|_{x=0} = \left.\frac{\partial\varkappa}{\partial x}\right|_{x=l_1} = 0$, $\left.\frac{\partial\varkappa}{\partial y}\right|_{y=0} = \left.\frac{\partial\varkappa}{\partial y}\right|_{y=l_2} = 0$,

$$\varkappa(x, y, \xi, \eta, t-\tau) = \frac{t-\tau}{l_1 l_2} + \frac{1}{l_1 l_2} \sum_{\substack{m,\ n=0 \\ m+n\neq 0}}^{+\infty} \varepsilon_{m,n} \cos\frac{m\pi x}{l_1} \times$$

$$\times \cos\frac{n\pi y}{l_2} \cos\frac{m\pi\xi}{l_1} \cos\frac{n\pi\eta}{l_2} \frac{\operatorname{sen}\left\{\pi a (t-\tau)\sqrt{\frac{m^2}{l_1^2}+\frac{n^2}{l_2^2}}\right\}}{a\sqrt{\frac{m^2}{l_1^2}+\frac{n^2}{l_2^2}}},$$

donde $\varepsilon_{m,n}=2$ para $m\cdot n=0$ y $\varepsilon_{m,n}=4$ para $m\cdot n\neq 0$;

3) para el tercer problema de contorno, cuando

$$\left.\frac{\partial\varkappa}{\partial x}\right|_{x=0} - \alpha_1\varkappa\Big|_{x=0} = 0, \quad \left.\frac{\partial\varkappa}{\partial x}\right|_{x=l_1} + \beta_1\varkappa\Big|_{x=l_1} = 0,$$

$$\left.\frac{\partial\varkappa}{\partial y}\right|_{y=0} - \alpha_2\varkappa\Big|_{y=0} = 0, \quad \left.\frac{\partial\varkappa}{\partial y}\right|_{y=l_2} + \beta_2\varkappa\Big|_{y=l_2} = 0,$$

$(x, y, \xi, \eta, t-\tau) =$

$$= 4 \sum_{m, n=0}^{+\infty} \frac{\operatorname{sen}(\mu_m x+\varphi_m)\operatorname{sen}(\nu_n y+\psi_n)\operatorname{sen}(\mu_n\xi+\varphi_n)\operatorname{sen}(\nu_n\eta+\psi_n)}{\left[l_1+\frac{(\alpha_1\beta_1+\mu_m^2)(\alpha_1^2+\beta_1^2)}{(\alpha_1^2+\mu_m^2)(\beta_1^2+\mu_m^2)}\right]\left[l_2+\frac{(\alpha_2\beta_2+\nu_n^2)(\alpha_2+\beta_2)}{(\alpha_2^2+\nu_n^2)(\beta_2^2+\nu_n^2)}\right]} \times$$

$$\times \frac{\operatorname{sen}\{a(t-\tau)\sqrt{\mu_m^2+\nu_n^2}\}}{a\sqrt{\mu_m^2+\nu_n^2}},$$

donde μ_m son las raíces positivas de la ecuación

$$\frac{1}{\alpha_1+\beta_1}\left(\mu-\frac{\alpha_1\beta_1}{\mu}\right) = \operatorname{ctg} l_1\mu,$$

ν_n, las raíces positivas de la ecuación

$$\frac{1}{\alpha_2+\beta^2}\left(\nu-\frac{\alpha_2\beta_2}{\nu}\right) = \operatorname{ctg} l_2\nu,$$

$$\varphi_m = \operatorname{arctg}\frac{\mu_m}{l_1}, \qquad \psi_n = \operatorname{arctg}\frac{\nu_n}{l_2}.$$

Daremos la respuesta para la membrana circular.

1) en el caso del primer problema de contorno, cuando $\varkappa|_{r=r_0}=0$,

$$\varkappa(r,\ \varphi,\ r',\ \varphi',\ t-\tau)=\sum_{n,\ k=0}^{+\infty}\frac{J_n\left(\frac{\mu_k^{(n)}r}{r_0}\right)J_n\left(\frac{\mu_k^{(n)}r'}{r_0}\right)}{\varepsilon_n\mu_k^{(n)}J_n'^2\left(\mu_k^{(n)}\right)}\times$$
$$\times\cos n(\varphi-\varphi')\ \text{sen}\,\frac{a\mu_k^{(n)}t}{r_0},$$

donde $\mu_k^{(n)}$ son las raíces positivas de la ecuación $J_n(\mu)=0$,

$$\varepsilon_n=\begin{cases}2 & \text{para} \quad n=0,\\ 1 & \text{para} \quad n\neq 0;\end{cases}$$

2) en el caso del segundo problema de contorno, cuando $\left.\frac{\partial\varkappa}{\partial r}\right|_{r=r_0}=0$,

$$\varkappa(r,\ \varphi,\ r',\ \varphi',\ t-\tau)=$$
$$=\frac{t-\tau}{\pi r_0^2}+\frac{2}{\pi a r_0}\sum_{n,\ k=0}^{+\infty}\frac{J_n\left(\frac{\mu_k^{(n)}r}{r_0}\right)J_n\left(\frac{\mu_k^{(n)}r'}{r_0}\right)}{\varepsilon_n\mu_k^{(n)}\left[1-\frac{n^2}{\mu_k^{(n)^2}}\right]J_n^2\left(\mu_k^{(n)}\right)}\times$$
$$\times\cos n(\varphi-\varphi')\ \text{sen}\,\frac{a\mu_k^{(n)}t}{r_0},$$

donde $\mu_k^{(n)}$ son las raíces positivas de la ecuación $J_n(\mu)=0$ y ε_n toma los mismos valores que en el caso 1);

3) en el caso del tercer problema de contorno, cuando

$$\left.\frac{\partial\varkappa}{\partial r}\right|_{r=r_0}+\alpha\varkappa|_{r=r_0}=0,$$

$$\varkappa(r,\ \varphi,\ r',\ \varphi',\ t-\tau)=$$
$$=\frac{2}{\pi a r_0}\sum_{n,\ k=0}^{+\infty}\frac{J_n\left(\frac{\mu_k^{(n)}r}{r_0}\right)J_n\left(\frac{\mu_k^{(n)}r'}{r_0}\right)}{\varepsilon_n\mu_k^{(n)}\left[1+\frac{\alpha^2-n^2}{\mu_k^{(n)^2}}\right]J_n^2\left(\mu_k^{(n)}\right)}\cos n(\varphi-\varphi')\ \text{sen}\,\frac{a\mu_k^{(n)}t}{r_0},$$

donde $\mu_k^{(n)}$ son las raíces positivas de la ecuación $\mu J_n(\mu)+\alpha J_n(\mu)=0$ y ε_n toma los mismos valores que en el caso 1).

118. Realizando las reflexiones pares, obtenemos, partiendo de la función de influencia para el plano no acotado:

$$\varkappa(r,\ \varphi,\ r_0,\ \varphi_0,\ t-\tau)=\frac{1}{2\pi\alpha}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{\sigma_0\left(t-\tau-\frac{r_k^+}{a}\right)}{\sqrt{a^2(t-\tau)^2-(r_k^+)^2}}\times$$
$$\times\text{ch}\left[c\sqrt{(t-\tau)^2-\frac{(r_k^+)^2}{a^2}}\right]+\frac{\sigma_0\left(t-\tau-\frac{r_k^-}{a}\right)}{\sqrt{a^2(t-\tau)^2-(r_k^-)^2}}\times$$
$$\times\text{ch}\left[c\sqrt{(t-\tau)^2-\frac{(r_k^-)^2}{a^2}}\right],$$

$$r_k^+ = \sqrt{r^2 + r_0^2 - 2rr_0 \cos\left(\varphi - \varphi_0 + 2k\frac{\pi}{m}\right)},$$

$$r_k^- = \sqrt{r^2 + r_0^2 - 2rr_0 \cos\left(\varphi - \varphi_0 + 2k\frac{\pi}{m}\right)}.$$

119. a) La solución del primer problema

$u_{tt} = a^2\Delta_2 u \pm c^2 u + f(x, y, t)$ dentro de la región G para $0 < t < +\infty$, (1)

$u|_{t=0} = \varphi(x, y)$, $u_t|_{t=0} = \psi(x, y)$ dentro de la región G, (2)

$u|_\Gamma = \mu(x, y, t)$ sobre el contorno Γ para $0 < t < +\infty$ (3)

se expresa mediante la función de influencia del impulso concentrado instantáneo $\varkappa = \varkappa(x, y, \xi, \eta, t-\tau)$ que satisface la condición de frontera $\varkappa|_\Gamma = 0$ del modo siguiente

$$u(x, y, t) = \iint_G [\varphi(\xi, \eta)\varkappa_t(x, y, \xi, \eta, t) + \psi(\xi, \eta)\varkappa(x, y, \xi, \eta, t)]\, d\xi\, d\eta +$$
$$+ \int_0^t d\tau \iint_G f(\xi, \eta, \tau)\varkappa(x, y, \xi, \eta, t-\tau)\, d\xi\, d\eta -$$
$$- a^2 \int_0^t d\tau \oint_\Gamma \mu(\xi, \eta, \tau) \frac{\partial\varkappa(x, y, \xi, \eta, t-\tau)}{\partial n}\, ds. \quad (4)$$

Aquí

$$\frac{\partial}{\partial n} = \cos(n, \xi)\frac{\partial}{\partial\xi} + \cos(n, \eta)\frac{\partial}{\partial\eta}$$

significa la derivada según la dirección de la normal exterior.

b) La solución del segundo problema de contorno que difiere del problema a) sólo por la condición de frontera

$$\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_\Gamma = \mu(x, y, t), \quad (3')$$

mediante la correspondiente función de influencia $\varkappa$ que satisface la condición de frontera

$$\left.\frac{\partial\varkappa}{\partial n}\right|_\Gamma = 0,$$

se expresa del modo siguiente:

$$u(x, y, t) = I_1 + I_2 + a^2 \int_0^t d\tau \oint_\Gamma \mu(\xi, \eta, \tau)\varkappa(x, y, \xi, \eta, t-\tau)\, d\xi\, d\eta, \quad (4')$$

donde I_1 e I_2 significan el primer y el segundo sumandos en la fórmula (4).

c) La solución del tercer problema de contorno que difiere del problema a) sólo por la condición de frontera

$$\left[\frac{\partial u}{\partial n} + \alpha u\right]\Big|_\Gamma = \mu(x, y, t), \quad (3'')$$

mediante la correspondiente función de influencia $\varkappa$ que satisface la condición de frontera

$$\left[\frac{\partial\varkappa}{\partial n}+\alpha\varkappa\right]\Big|_{\Gamma}=0,$$

se expresa del modo siguiente

$$u(x,\ y,\ t)=I_1+I_2+a^2\int_0^t d\tau\oint_\Gamma \mu(\xi,\ \eta,\ \tau)\,\varkappa(x,\ y,\ \xi,\ \eta,\ t-\tau)\,ds, \qquad (4'')$$

donde I_1 e I_2 tienen los mismos valores que en (4').

Indicación. Pasando a las ecuaciones

$$\frac{\partial^2\varkappa}{\partial t^2}=a^2\underset{xy}{\Delta_2}\varkappa\pm c^2\varkappa \qquad (5)$$

y

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\underset{xy}{\Delta_2}u\pm c^2u+f(x,\ y,\ t) \qquad (6)$$

de x, y, t a ξ, η, τ y utilizando las condiciones iniciales para $\varkappa(x,\ y,\ \xi,\ \eta,\ t-\tau)$:

$$\varkappa\,|_{t=\tau}=0, \qquad \varkappa_t\,|_{t=\tau}=\delta(x-\xi)\,\delta(y-\eta),$$

no es difícil obtener mediante la fórmula de Green—Ostrogradski que

$$\begin{aligned}
u(x,\ y,\ t)=\iint_G [u(\xi,\ \eta,\ 0)\,\varkappa_t(x,\ y,\ \xi,\ \eta,\ t)+\\
+u_t(\xi,\ \eta,\ 0)\,\varkappa(x,\ y,\ \xi,\ \eta,\ t)]\,d\xi\,d\eta+\\
+\int_0^t d\tau\iint_G f(\xi,\ \eta,\ \tau)\,\varkappa(x,\ y,\ \xi,\ \eta,\ t-\tau)\,d\xi\,d\eta+\\
+a^2\int_0^t d\tau\oint_\Gamma\Big[\varkappa(x,\ y,\ \xi,\ \eta,\ t-\tau)\,\frac{\partial u(\xi,\ \eta,\ \tau)}{\partial n}-\\
-u(\xi,\ \eta,\ \tau)\,\frac{\partial\varkappa(x,\ y,\ \xi,\ \eta,\ t-\tau)}{\partial n}\Big]\,ds. \qquad (7)
\end{aligned}$$

Para eso las ecuaciones (5) y (6) después del paso a ξ, η, τ, se deben multiplicar respectivamente por $u(\xi,\ \eta,\ \tau)$ y $\varkappa(x,\ y,\ \xi,\ \eta,\ t-\tau)$, restar una de otra, e integrar el resultado con respecto a ξ, η sobre la región G y con respecto a τ entre 0 y t.

120. *Indicación*. Sea la región Ω acotada por las superficies S_1 y S_2 (fig. 56). Trazamos, tomando el punto $(x,\ y,\ z)$ como el centro la esfera S_ε de radio ε; el volumen acotado por ella lo indicamos por ω_ε. Multiplicando la ecuación

$$\frac{\partial^2 u}{\partial\tau^2}=a^2\underset{\xi\eta\zeta}{\Delta_3}u+f(\xi,\ \eta,\ \zeta,\ \tau)$$

por

$$\varkappa(x, y, z, \xi, \eta, \zeta, t-\tau)=\frac{1}{4\pi a^2}\cdot\frac{\delta\left(t-\tau-\frac{r}{a}\right)}{r}$$

y la ecuación

$$\frac{\partial^2\varkappa}{\partial\tau^2}=a^2\underset{\xi\eta\zeta}{\Delta_3}\varkappa$$

por $u(\xi, \eta, \tau)$, se debe restar una de otra e integrar el resultado sobre el volumen Ω con la exclusión de ω_ε y con respecto a τ entre $\tau_1 < 0$ y $\tau_2 > 0$, conside-

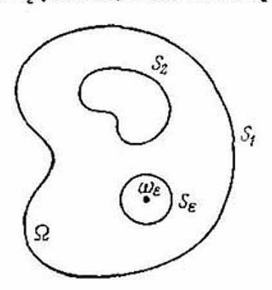


Fig. 56

rando u y f continuadas de cualquier modo para los valores negativos de t.

b) Función de influencia de los manantiales concentrados de funcionamiento continuo

121. $$\omega(x, y, z, x_0, y_0, z_0, t)=\frac{1}{4\pi a^2}\frac{f\left(t-\frac{r}{a}\right)}{r},$$

donde

$$r=\sqrt{(x-x_0)^2+(y+y_0)^2+(z-z_0)^2}.$$

122. $$\omega(x, y, x_0, y_0, t)=\begin{cases}\dfrac{1}{2\pi a}\displaystyle\int_0^{t-\frac{r}{a}}\frac{f(\tau)\,d\tau}{\sqrt{a^2(t-\tau)^2+r^2}} & \text{para } t>\dfrac{r}{a},\\[2ex] 0 & \text{para } 0<t<\dfrac{r}{a},\end{cases}$$

donde $r=\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}$.

123. $$\tilde{\omega}(x, y, z, t)=\frac{1}{4\pi a^2}\sum_{r_k}\frac{f\left(t-\frac{r_k}{a}\right)}{\frac{1}{2}\left|\frac{dF(r)}{dr}\right|_{r=r_k}},$$

donde

$$F(r)=\left\{X\left(t-\frac{r}{a}\right)-x\right\}^2+\left\{Y\left(t-\frac{r}{a}\right)-y\right\}^2+\left\{Z\left(t-\frac{r}{a}\right)-z\right\}^2-r^2,$$

y r_k son las raíces positivas de la ecuación $F(r)=0$,

$$\frac{1}{2}\left|\frac{dF(r)}{dr}\right|=\left|r\left(1-\frac{\omega_r}{a}\right)\right|,$$

donde ω_r es la proyección de la velocidad del manantial sobre la dirección del radio vector r, trazado desde el punto de observación al manantial; por eso $\frac{dF(r)}{dr}$ se puede anularse sólo en tal caso cuando la velocidad del movimiento del manantial $w > a$; por consiguiente, sólo en esta condición la ecuación $F(r)=0$ puede tener más de una raíz.

Si el manantial se mueve rectilíneamente con una velocidad constante v, entonces, dirigiendo el eje x en el sentido del movimiento del manantial, obtenemos

a) para $v<a$, es decir, para $M=\frac{v}{a}<1$,

$$\tilde{\omega}(x, y, z, t)=\frac{1}{4\pi a^3}\frac{f\left(t-\frac{M(x-vt)+\sqrt{(x-vt)^3+(1-M^2)(y^2+z^2)}}{a(1-M^2)}\right)}{\sqrt{(x-vt)^2+(1-M^2)(y^2+z^2)}};$$

b) para $v>a$, es decir, para $M=\frac{v}{a}>1$

$$\tilde{\omega}(x, y, z, t)=\frac{1}{4\pi a^2}\frac{f\left(t+\frac{M(x-vt)+\sqrt{(x-vt)^3-(M^2-1)(y^2+z^2)}}{a(M^2-1)}\right)}{\sqrt{(x-vt)^2-(M^2-1)(y^2+z^2)}}+$$
$$+\frac{1}{4\pi a^2}\cdot\frac{f\left(t+\frac{M(x-vt)-\sqrt{(x-vt)^2-(M^2-1)(y^2+z^2)}}{a(M^2-1)}\right)}{\sqrt{(x-vt)^2-(M^2-1)(y^2+z^2)}}.$$

Observación. Con esta igualdad la solución se determina dentro del cono circular con la vértice en O' el eje de que sirve el semieje negativo de x y el segmento OO' (véase fig. 57); $\operatorname{ctg}\alpha = M^2-1$. En este cono la raíz $\sqrt{(x-vt)^2-(M^2-1)(y^2+z^2)}$ es real. Si el manantial empezó a actuar en el momento de tiempo $t=0$ cuando se encontraba en el punto O, entonces la región, en que las perturbaciones excitadas por él pueden ser diferentes de cero, es la parte del espacio acotada por el cono mencionado y la parte de la esfera de radio at con el centro en el punto O (el punto O está dentro de esta región y el cono es tangente a la esfera).

En el punto de «observación» $A\ (x,\ y,\ z)$ en el momento t para $v > a$ llegan las perturbaciones emanadas por el manantial de dos posiciones: A_1

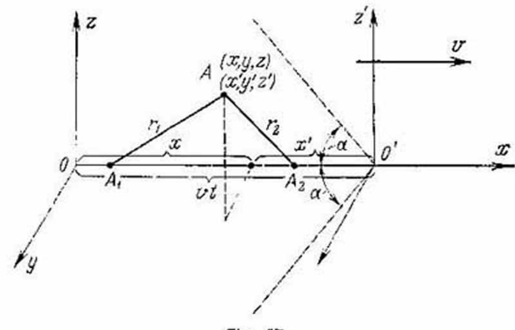


Fig. 57

y A_2. Las distancias A_1A y A_2A son iguales a

$$A_1A = r_1 = -\frac{M\,(x-vt) + \sqrt{(x-vt)^2-(M^2-1)\,(y^2+z^2)}}{M^2-1}$$

$$A_2A = r_2 = -\frac{M\,(x-vt) - \sqrt{(x-vt)^2-(M^2-1)\,(y^2+z^2)}}{M^2-1}.$$

En el punto A_1 el manantial se encuentra en el momento $t_1 = t - \frac{r_1}{a}$ y en el punto A_2, en el momento $t_2 = t - \frac{r_2}{a}$.

Si la potencia del manantial es constante y es igual a q, entonces

a) para $v < a$, es decir para $M = \frac{v}{a} < 1$,

$$\tilde{\omega}\,(x,\ y,\ z,\ t) = \frac{1}{4\pi a^2}\,\frac{q}{\sqrt{(x-vt)^2+(1-M^2)\,(y^2+z^2)}};$$

b) para $v > a$, es decir para $M = \frac{v}{a} > 1$,

$$\tilde{\omega}\,(x,\ y,\ z,\ t) = \frac{1}{2\pi a^2}\cdot\frac{q}{\sqrt{(x-vt)^2-(M^2-1)\,(y^2+z^2)}}.$$

Indicación. En la integral que expresa la solución de la ecuación (1) con las condiciones iniciales (2)

$$\tilde{\omega}\,(x,\ y,\ z,\ t) = \frac{1}{4\pi a^2}\iiint\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{[f]}{r}\,\delta\,(\xi-[X])\,\delta\,(\eta-[Y])\times$$

$$\times\delta\,(\zeta-[Z])\,d\xi\,d\eta\,d\zeta,$$

$$r = \sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2},$$

donde $[\Phi]$ significa que en la función Φ el argumento t está sustituido por $t-\frac{r}{a}$, es conveniente pasar a las variables nuevas de integración α, β, γ:

$$\alpha=\xi-[X], \quad \beta=\eta-[Y], \quad \gamma=\zeta-[Z];$$

con esto en vez del determinante $\frac{D(\xi,\ \eta,\ \zeta)}{D(\alpha,\ \beta,\ \gamma)}$ es conveniente utilizar el determinante $\frac{D(\alpha,\ \beta,\ \gamma)}{D(\xi,\ \eta,\ \zeta)}$.

124. El manantial está en el origen del sistema de coordenadas $O'x'y'z'$ que se mueve junto con el manantial y está situado como se indica en fig. 57, $x'=vt-x$, $y'=y$, $z'=z$.

a) Para $v<a$, es decir $M=\frac{v}{a}<1$, se obtiene la ecuación de tipo elíptico

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x'^2}+\frac{1}{1-M^2}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y'^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z'^2}\right)=-\frac{q}{a^2(1-M^2)}\delta(x')\,\delta(y')\,\delta(z');$$

mediante la sustitución de variables $x'=\xi$, $y'=\frac{\eta}{\sqrt{1-M^2}}$, $z'=\frac{\zeta}{\sqrt{1-M^2}}$ se transforma en la ecuación de Poisson

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial \zeta^2}=-4\pi\left(\frac{q}{4\pi a^2}\right)\delta(\xi)\,\delta(\eta)\,\delta(\zeta),$$

cuya solución es la función de influencia del manantial concentrado

$$u(\xi,\ \eta,\ \zeta)=\frac{q}{4\pi a^2\sqrt{\xi^2+\eta^2+\zeta^2}}$$

o en las coordenadas iniciales x', y', z':

$$u(x',\ y',\ z')=\frac{q}{4\pi a^2\sqrt{x'^2+(1-M^2)(y'^2+z'^2)}};$$

b) para $v>a$, es decir para $M=\frac{v}{a}>1$, se obtiene la ecuación de tipo hiperbólico

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x'^2}=\frac{1}{M^2-1}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y'^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z'^2}\right)+\frac{q}{a^2(M^2-1)}\delta(x')\,\delta(y')\,\delta(z').$$

Resolviéndola mediante la fórmula integral necesaria con las condiciones iniciales

$$u|_{x'=0}=0, \quad u_{x'}|_{x'=0}=0,$$

obtenemos

$$u(x',\ y',\ z')=\frac{1}{2\pi a^2}\cdot\frac{q}{\sqrt{x'^2-(M^2-1)(y'^2+z'^2)}}.$$

125. Sea que el electrón se mueve a lo largo del eje z con una velocidad $v=\text{const}$*), $a=\frac{c}{\sqrt{\varepsilon}}<v<c$, donde c es la velocidad de la luz en el vacío y $a=\frac{c}{\sqrt{\varepsilon}}$, la velocidad de la luz en el dieléctrico en examen con la constante dieléctrica ε. El potencial escalar del campo magnético excitado por el electrón móvil es

$$\varphi=\begin{cases}\dfrac{2e}{\varepsilon\sqrt{(vt-z)^2-\gamma^2r^2}} & \text{para} \quad vt-z>\gamma r,\\ 0 & \text{para} \quad vt-z<\gamma r.\end{cases} \tag{1}$$

Aquí e es la carga del electrón; $\gamma^2=\frac{v^2}{a^2}-1$; $r=\sqrt{x^2+y^2}$, y se supone que en el momento $t=0$ el electrón está en el punto

$$x=y=z=0.$$

Las componentes del potencial vectorial son iguales a

$$A_x=A_y=0, \quad A_z=\varepsilon\frac{v}{c}\varphi, \tag{2}$$

además,

$$H=\text{rot}\,A, \quad E=-\text{grad}\,\varphi-\frac{1}{c}\frac{\partial A}{\partial t}. \tag{2'}$$

En cada momento de tiempo t el campo electromagnético excitado por el electrón es diferente de cero sólo dentro del cono con vértice en el electrón (fig. 58)

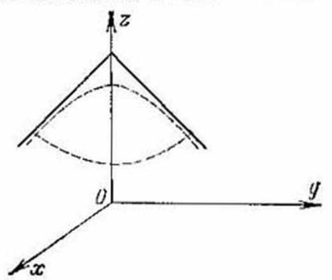


Fig. 58

y las superficies equipotenciales dentro del cono son los hiperboloides de rotación $(vt-z)^2-\gamma^2r^2=\text{const}$.

Indicación. Para los potenciales escalar y vectorial tienen lugar las ecuaciones

$$\left.\begin{aligned}\Delta\varphi-\frac{\varepsilon}{c^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}&=-\frac{4\pi}{\varepsilon}\rho,\\ \Delta A-\frac{\varepsilon}{c^2}\frac{\partial^2 A}{\partial t^2}&=-\frac{4\pi}{c}j^{(e)},\end{aligned}\right\} \tag{3}$$

*) En realidad esta velocidad variará como resultado de la radiación de energía por el electrón. Para más detalles sobre esto véase [18].

además *)

$$\operatorname{div} A+\frac{\varepsilon}{c}\frac{\partial\varphi}{\partial t}=0. \tag{4}$$

En nuestro caso

$$j_x^{(e)}=j_y^{(e)}=0, \quad j_z^{(e)}=v\rho=ve\delta(x)\,\delta(y)\,\delta(z-vt), \tag{5}$$

$$\rho=e\delta(x)\,\delta(y)\,\delta(z-vt). \tag{6}$$

La sustitución de estos valores de ρ y j en la ecuación (3) inmediatamente da

$$A_x=A_y=0, \quad A_z=\varepsilon\frac{v}{c}\varphi, \tag{7}$$

por eso la igualdad (4) se transforma en la igualdad

$$\frac{\partial A_z}{\partial z}+\frac{\varepsilon}{c}\frac{\partial\varphi}{\partial t}=0, \tag{8}$$

lo que permite, utilizando (7) y (8), expresar todas las componentes del campo electromagnético por medio del potencial escalar φ.

126.

$$H_\varphi=\begin{cases}-\dfrac{M_0\omega^2}{r^2a^2}\left[r\cos\omega\left(t-\dfrac{r}{a}\right)+\dfrac{a}{\omega}\operatorname{sen}\omega\left(t-\dfrac{r}{a}\right)\right]\operatorname{sen}\theta, & t>\dfrac{r}{a},\\ 0 & t<\dfrac{r}{a},\end{cases}$$

$$E_r=\begin{cases}-\dfrac{M_0\omega^2}{r^3a}\left[r\operatorname{sen}\omega\left(t-\dfrac{r}{a}\right)-\dfrac{a}{\omega}\cos\omega\left(t-\dfrac{r}{a}\right)\right]\cos\theta, & t>\dfrac{r}{a},\\ \dfrac{2M_0\cos\theta}{r^3}, & t<\dfrac{r}{a}\end{cases}$$

$$E_\theta=\begin{cases}-\dfrac{M_0\omega^2}{r^2a^2}\left[\left(r^2-\dfrac{a^2}{\omega^2}\right)\cos\omega\left(t-\dfrac{r}{a}\right)+\dfrac{ra}{\omega}\operatorname{sen}\omega\left(t-\dfrac{r}{a}\right)\right]\operatorname{sen}\theta, & \\ & t>\dfrac{r}{a},\\ \dfrac{M_0\operatorname{sen}\theta}{r^3}, & t<\dfrac{r}{a}.\end{cases}$$

127. Para los desplazamientos de u, v, w, en el sentido de los ejes x, y, z, considerando que la fuerza $F(t)$ es aplicada al origen de las coordenadas y está dirigida a lo largo del eje x, obtenemos la expresión

$$u=\frac{1}{4\pi\rho}\left[\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{1}{r}\right)\right]\cdot\int\limits_{r/a}^{r/b}\tau F(t-\tau)\,d\tau+\frac{x^2}{r^3}\left\{\frac{1}{a^2}F\left(t-\frac{r}{a}\right)-\right.$$

$$\left.-\frac{1}{b^2}F\left(t-\frac{r}{b}\right)+\frac{1}{b^2r}F\left(t-\frac{r}{b}\right)\right\},$$

*) Véase [7], pág. 498.

$$v=\frac{1}{4\pi\rho}\left[\frac{\partial^2}{\partial x\,\partial y}\left(\frac{1}{r}\right)\right]\int\limits_{\frac{r}{a}}^{\frac{r}{b}}\tau F(t-\tau)\,d\tau+\frac{xy}{r^3}\left\{\frac{1}{a^2}F\left(t-\frac{r}{a}\right)-\right.$$

$$\left.-\frac{1}{b^2}F\left(t-\frac{r}{b}\right)\right\},$$

$$w=\frac{1}{4\pi\rho}\left[\frac{\partial^2}{\partial x\,\partial z}\left(\frac{1}{r}\right)\right]\int\limits_{\frac{r}{a}}^{\frac{r}{b}}\tau F(t-\tau)\,d\tau+\frac{xz}{r^3}\left\{\frac{1}{a^2}F\left(t-\frac{r}{a}\right)-\right.$$

$$\left.-\frac{1}{b^2}F\left(t-\frac{r}{b}\right)\right\},$$

donde

$$a^2=\frac{(2m-2)\,G}{(m-2)\,\rho}=\frac{\lambda+2\mu}{\rho},\qquad b^2=\frac{G}{\rho}=\frac{\mu}{\rho},$$

ρ es la densidad de la masa del medio; a, la velocidad de propagación de las deformaciones longitudinales; b, la velocidad de propagación de las deformaciones transversales.

Indicación. A la superficie de la esfera pequeña de radio r con centro en el origen de las coordenadas se le aplican las tensiones elásticas, cuya resultante debe coincidir con $F(t)$. Por consiguiente, cuando $r\to 0$ las tensiones deben tener el orden $\frac{1}{r^2}$ (si sólo $F(t)\not\equiv 0$ y es una magnitud constante). Los desplazamientos cuyas derivadas son proporcionales a las tensiones deben tener el orden $\frac{1}{r}$.

Capítulo VII

ECUACIONES DE TIPO ELÍPTICO $\Delta u + cu = -f$

§ 1. Problemas para la ecuación $\Delta u - \varkappa^2 u = f$

1. La concentración del gas en el punto $M(x, y, z)$, que se halla a una distancia r del manantial $P = P(\xi, \eta, \zeta)$ es

$$u = \frac{Q_0}{4\pi D}\frac{e^{-\varkappa r}}{r}, \quad r = \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2}.$$

donde D es el coeficiente de difusión, $\varkappa^2 = \frac{\beta}{D}$; β, la constante de desintegración.

2. $$u(M, P) = \frac{Q_0}{4\pi D}\left(\frac{e^{-\varkappa r}}{r} + \frac{e^{-\varkappa r_1}}{r_1}\right),$$

donde

$$M = M(x, y, z), \quad P = P(\xi, \eta, \zeta),$$
$$r = \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2},$$
$$r_1 = MP_1 = \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z+\zeta)^2},$$
$$P_1 = P_1(\xi, \eta, -\zeta).$$

El manantial está en el punto $P(\xi, \eta, \zeta)$.

Indicación. La condición de la estanqueidad a los gases de la pared $z = 0$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_{z=0} = 0$$

demuestra que la reflexión con respecto al plano debe ser par.

3. La función del manantial puntiforme para la ecuación

$$\Delta_2 u - \varkappa^2 u = 0$$

sobre el plano (x, y) es de la forma

$$G(x, y; \xi \ \eta) = \frac{1}{2\pi} K_0(\varkappa r),$$

donde K_0 es una función cilíndrica de argumento imaginario, orden nulo, y segundo género.

$$r = \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2}.$$

La interpretación física de la función del manantial es la concentración estacionaria excitada en el punto x, y, z_0, por el manantial del gas inestable, uniformemente distribuida sobre la recta infinita paralela al eje z y que pasa por el punto ξ, η, z_0; la potencia del manantial por unidad de longitud es igual numéricamente a D.

4. $$G(x, y; \xi, \eta) = \frac{1}{2\pi}[K_0(\varkappa r) + K_0(\varkappa r_1)],$$

donde

$$r = \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2}, \quad r_1 = \sqrt{(x-\xi)^2 + (y+\eta)^2}.$$

14—0942

5. Si el manantial está en el punto (ξ, η, ζ), entonces

$$u=\frac{Q_0}{4\pi D}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left[\frac{e^{-\varkappa r_n}}{r_n}+\frac{e^{-\varkappa r'_n}}{r'_n}\right],$$

donde

$$r_n=\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-\zeta_n)^2},$$
$$r'_n=\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-\zeta'_n)^2}$$
$$\zeta_n=2nl+\zeta,\quad \zeta'_n=2nl-\zeta.$$

Indicación. Las imágenes en los planos $z=0$ y $z=l$ son pares y están en los puntos

$$(\xi,\ \eta,\ \zeta_n=2nl+\zeta)\quad \text{y}\quad (\xi,\ \eta,\ \zeta'_n=2nl-\zeta).$$

La convergencia de la serie es evidente en virtud de la existencia de los factores expotenciales $e^{-\varkappa r_n}$ y $e^{-\varkappa r'_n}$ bajo el signo de la suma.

6. Si el manantial está en el punto (ξ, η), entonces

$$u=\frac{Q}{2\pi D}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\{K_0(\varkappa r_n)+K_0(\varkappa r'_n)\},$$

donde

$$r_n=\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta_n)^2},$$
$$r'_n=\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta'_n)^2},$$
$$\eta_n=2nl+\eta,\quad \eta'_n=2nl-\eta.$$

Indicación. Véase el problema 5. La convergencia de la serie se ve de la fórmula asintótica

$$K_0(x)=\sqrt{\frac{1}{2\pi x}}\,e^{-x}+\ldots$$

7. $$u=\frac{Q_0}{2D}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\psi_n(M)\,\psi_n(P)}{\|\psi_n\|^2\sqrt{\lambda_n+\varkappa^2}}\,e^{-\sqrt{\lambda_n+\varkappa^2}\,|z-\zeta|},$$

donde $(M(x,\ y);\ z)$ es el punto de observación, $(P(\xi,\ \eta);\ \zeta)$, el punto en que está el manantial; λ_n y ψ_n, los valores y funciones propios del problema plano

$$\Delta_2\psi_n+\lambda_n\psi_n=0\quad \text{sobre}\quad S,$$
$$\frac{\partial\psi_n}{\partial\nu}=0\quad \text{sobre}\quad C,$$

S, la sección transversal del tubo; C, su frontera; ν, la normal a C,

$$\|\psi_n\|^2=\int_S\psi_n^2\,ds.$$

Indicación. La solución del problema de contorno

$$\left.\begin{aligned} D\Delta u-\beta u&=-f \\ \Delta u-\varkappa^2 u&=-\frac{f}{D}\end{aligned}\right\} \text{ dentro de } \Sigma,$$

$$\frac{\partial u}{\partial \nu}=0 \qquad \text{sobre } \Sigma.$$

donde Σ es la superficie del tubo, se debe buscar en la forma

$$u=\sum_{n=1}^{\infty} u_n(z)\,\psi_n(M).$$

Conociendo la solución de este problema, no es difícil pasar al caso límite del manantial puntiforme.

8. Si el manantial está en el punto $(\rho, \theta', \varphi')$, entonces

$$u(r, \theta, \varphi)=\frac{Q_0}{D}\,G(r, \theta, \varphi; \rho, \theta', \varphi'),$$

donde $G(r, \theta, \varphi; \rho, \theta', \varphi')$ es la función del manantial que se define por las fórmulas

$$G(r, \theta, \varphi; \rho, \theta', \varphi')=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=-n}^{n}\frac{Y_n^{(k)}(\theta, \varphi)\,Y_n^{(k)}(\theta', \varphi')}{\|Y_n^{(k)}\|^2}\,G_n(r, \rho),$$

donde

$$Y_n^{(k)}=P_n^{(k)}(\cos\theta)\left\{\begin{array}{lll}\cos k\varphi & \text{para} & k\geqslant 0,\\ \operatorname{sen}|k| & \text{para} & k<0\end{array}\right.$$

son las funciones esféricas; $P_n^{(k)}$, las funciones asociadas de Legendre,

$$\|Y_n^{(k)}\|^2=\frac{2}{2n+1}\,\pi e_k\,\frac{(n+k)!}{(n-k)!}, \qquad \varepsilon_k=\left\{\begin{array}{lll}2 & \text{para} & k=0,\\ 1 & \text{para} & k\neq 0,\end{array}\right.$$

$$G_n(r, \rho)=\left\{\begin{array}{ll}\varkappa^2\left[\xi_n'(\varkappa a)\,\eta_n(\varkappa\rho)-\xi_n(\varkappa\rho)\,\eta_n'(\varkappa a)\right]\dfrac{\xi_n(\varkappa r)}{\xi_n'(\varkappa a)} & \text{para} \quad r<\rho,\\ \varkappa^2\left[\xi_n'(\varkappa a)\,\eta_n(\varkappa r)-\xi_n(\varkappa r)\,\eta_n'(\varkappa a)\right]\dfrac{\xi_n(\varkappa\rho)}{\xi_n'(\varkappa a)} & \text{para} \quad r>\rho;\end{array}\right.$$

$$\xi_n(x)=x^{-\frac{1}{2}}I_{n+\frac{1}{2}}(x), \qquad \eta_n(x)=x^{-\frac{1}{2}}K_{n+\frac{1}{2}}(x).$$

Indicación. Representar la solución del problema $\Delta u-\varkappa^2 u=-f$, $u_r\,|_{r=a}=0$ en la forma

$$u(r, \theta, \varphi)=\int_0^a\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} G(r, \theta, \varphi; \rho, \theta', \varphi')\,f(\rho, \theta', \varphi')\,\rho^2\,d\rho\,\operatorname{sen}\theta'\,d\theta'\,d\varphi'.$$

Haciendo

$$u=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=-n}^{n} u_{nk}(r)\, Y_n^{(k)}(\theta,\ \varphi), \quad f=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=-n}^{n} f_{nk}(r)\, Y_n^{(k)}(\theta,\ \varphi).$$

obtenemos

$$Lu_{nk}=(r^2u'_{nk})'-(\varkappa^2r^2+n(n+1))\,u_{nk}=-f_{nk}(r), \quad u'_{nk}(a)=0,$$

$$u_{nk}(r)=\int_0^a G_n(r,\ \rho)\, f_{nk}(\rho)\,\rho^2\,d\rho, \quad f_{nk}=\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} f(\rho,\ \theta',\ \varphi')\, Y_n^{(k)}(\theta',\ \varphi')\times$$
$$\times \operatorname{sen}\theta'\,d\theta'\,d\varphi'$$

$$LG_n=0\ (r\neq\rho), \quad G_n(\rho-0,\ \rho)=G_n(\rho+0,\ \rho),$$
$$G'_n(\rho+0,\ \rho)-G'_n(\rho-0,\ \rho)=-\frac{1}{\rho^2}, \quad G'_n(a,\ \rho)=0.$$

9. Si al eje z del sistema rectangular de coordenadas lo dirigimos a lo largo de v_0, entonces

$$u(x,\ y,\ z)=\frac{Q_0}{D}\,\frac{e^{-\varkappa r-\frac{v_0}{2D}(z-\zeta)}}{4\pi r},$$

donde

$$\varkappa=\frac{\beta}{D}, \quad r=\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2}.$$

10. Si $r=a$ es el radio del cilindro, entonces

$$u(r)=u_0\,\frac{I_0(\varkappa r)}{I_0(\varkappa a)}, \quad r=\sqrt{x^2+y^2}.$$

Indicación. Se exige hallar la solución acotada de la ecuación

$$\Delta_2 u-\varkappa^2 u=0, \quad r<a$$

con la condición

$$u\,|_{r=a}=u_0.$$

11. $u=u(r)=u_0\,\dfrac{K_0(\varkappa r)}{K_0(\varkappa a)}.$

12. a) $u=u_0\,\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{r}}\,\dfrac{I_{\frac{1}{2}}(\varkappa r)}{I_{\frac{1}{2}}(\varkappa a)}=u_0\dfrac{a}{r}\,\dfrac{\operatorname{sh}\varkappa r}{\operatorname{sh}\varkappa a};$

b) $u=u_0\,\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{r}}\,\dfrac{I_{\frac{3}{2}}(\varkappa r)}{I_{\frac{3}{2}}(\varkappa a)}\cos\theta=u_0\left(\dfrac{a}{r}\right)^2\dfrac{\varkappa r\operatorname{ch}\varkappa r-\operatorname{sh}\varkappa r}{\varkappa a\operatorname{ch}\varkappa a-\operatorname{sh}\varkappa a}\cos\theta.$

13. a) $u = u_0 \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{r}} \frac{K_{\frac{1}{2}}(\varkappa r)}{K_{\frac{1}{2}}(\varkappa a)} = u_0 \frac{ae^{-\varkappa r}}{re^{-\varkappa a}}$;

b) $u = u_0 \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{r}} \frac{K_{\frac{3}{2}}(\varkappa r)}{K_{\frac{3}{2}}(\varkappa a)} \cos\theta = u_0 \left(\frac{a}{r}\right)^2 \frac{\varkappa r+1}{\varkappa a+1} \frac{e^{-\varkappa r}}{e^{-\varkappa a}} \cdot \cos\theta.$

14. a) Si la superficie terrestre coincide con el plano $z = 0$, entonces la distribución de la concentración de la emanación dentro de la tierra se da por la fórmula

$$u = \begin{cases} \frac{f_0}{\beta} e^{-\varkappa h} \operatorname{sh} \varkappa r & \text{para} \quad 0 < z < h, \\ \frac{f_0}{\beta} (1 - e^{-\varkappa z} \operatorname{ch} \varkappa h) & \text{para} \quad h < z < \infty, \end{cases}$$

donde $\varkappa = \sqrt{\frac{\beta}{D}}$; β es la constante de radiación; D, el coeficiente de difusión, f_0, la densidad de los manantiales.

b) El flujo de la emanación a través de la superficie terrestre es

$$q = D \frac{\partial u}{\partial z}\Big|_{z=0} = \frac{f_0}{\varkappa} e^{-\varkappa h}.$$

15. a) Si $z = 0$ es la superficie terrestre y el manantial está en el punto $(0, 0, h)$, entonces la concentración es

$$u = \frac{Q_0}{4\pi D} \left(\frac{e^{-\varkappa r_1}}{r_1} - \frac{e^{-\varkappa r_2}}{r_2} \right),$$

donde

$$r_1 = \sqrt{\rho^2 + (z-h)^2}, \quad r_2 = \sqrt{\rho^2 + (z+h)^2}, \quad \rho = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

b) (El flujo a través de la superficie terrestre $z = 0$ es

$$q(\rho) = D \frac{\partial u}{\partial z}\Big|_{z=0} = \frac{Q_0 h}{2\pi r_0^2} \left(\varkappa + \frac{1}{r_0}\right) e^{-\varkappa r_0},$$

donde

$$r_0 = \sqrt{\rho^2 + h^2}.$$

16. Se exige determinar Q_0 y h. Para eso, utilizando los resultados de observación, es decir, la magnitud $q(\rho)$, hallamos el flujo total a través de la superficie terrestre

$$Q = \int_0^\infty \int_0^{2\pi} q(\rho)\, \rho\, d\rho\, d\varphi = Q_0 e^{-\varkappa h}. \tag{1}$$

después la integral

$$I=\int_0^\infty\int_0^{2\pi} q\rho^2\,d\rho\,d\varphi=-Q_0h\left[\int_0^\infty \frac{\partial}{\partial\rho}\left(\frac{e^{-\varkappa r}}{r}\right)\rho\,d\rho\right]_{z=0}=$$

$$=Q_0h\int_0^\infty \frac{e^{-\varkappa\sqrt{\rho^2+h^2}}}{\sqrt{\rho^2+h^2}}\,d\rho=Q_0h\int_0^\infty e^{-\varkappa h\,\mathrm{ch}\,\xi}\,d\xi=Q_kh\cdot K_0(\varkappa h),$$

ó

$$I=Q_0hK_0(\varkappa h). \tag{2}$$

De las fórmulas (1) y (2) tenemos

$$hK_0(\varkappa h)\,e^{\varkappa h}=\frac{I}{Q}.$$

De aquí, dado que I y Q son conocidas, determinamos la variable h y después según la fórmula (1), la potencia del manantial Q_0.

La posición del manantial en el plano horizontal se determina obviamente por el máximo del flujo de observación $q(\rho)$.

§ 2. Algunos problemas sobre las oscilaciones propias

1. Oscilaciones propias de las cuerdas y membranas

17. Designamos por $v=v(x)$ la amplitud de la desviación del punto de la cuerda con la coordenada x. Se exige hallar la solución de la ecuación homogénea

$$v''+\lambda v=0$$

con las correspondientes condiciones homogéneas de frontera.

a) Las condiciones de frontera son

$$v(0)=0,\quad v(l)=0,$$

los valores propios son

$$\lambda_n=\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2\quad (n=1,\ 2,\ \ldots),$$

las funciones propias son

$$v_n(x)=\operatorname{sen}\frac{\pi n}{l}x,$$

el cuadrado de la norma de las funciones propias es

$$\|v_n\|^2=l/2.$$

b) Las condiciones de frontera son

$$v'(0)=0,\quad v'(l)=0,$$

los valores propios son

$$\lambda_n=\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2\quad (n=0,\ 1,\ 2,\ \ldots),$$

las funciones propias son

$$v_n(x)=\cos\frac{\pi n}{l}x \quad (n=0,\ 1,\ 2,\ \ldots),$$

el cuadrado de la norma es

$$\|v_n\|^2=\frac{l}{2}\varepsilon_n, \qquad \varepsilon_n=\begin{cases}2, & n=0,\\ 1, & n\neq 0.\end{cases}$$

c) Las condiciones de frontera son

$$v(0)=0, \qquad v'(l)=0,$$

los valores propios son

$$\lambda_n=\left[\frac{\pi(2n+1)}{2l}\right]^2 \quad (n=0,\ 1,\ 2,\ \ldots),$$

las funciones propias son

$$v_n(x)=\operatorname{sen}\frac{\pi(2n+1)}{2l}x \quad (n=0,\ 1,\ 2,\ \ldots),$$

el cuadrado de la norma es

$$\|v_n\|^2=l/2.$$

d) Las condiciones de frontera son

$$v'(0)-h_1v(0)=0, \qquad v'(l)+h_2v(l)=0,$$

donde $h_1>0$, $h_2>0$,
los valores propios λ_n se determinan de la ecuación trascedente

$$\operatorname{tg}\sqrt{\lambda}l=\frac{(h_1+h_2)\sqrt{\lambda}}{\lambda-h_1h_2} \tag{1}$$

ó

$$\operatorname{tg}\mu l=\frac{(h_1+h_2)\mu}{\mu^2-h_1h_2}, \qquad \lambda_n=\mu_n^2,$$

las funciones propias son

$$v_n(x)=\frac{1}{\sqrt{\lambda_n+h_1^2}}\left[\sqrt{\lambda_n}\cos\sqrt{\lambda_n}x+h_1\operatorname{sen}\sqrt{\lambda_n}x\right],$$

el cuadrado de la norma es

$$\|v_n\|^2=\frac{l}{2}+\frac{(h_1+h_2)(\mu_n^2+h_1h_2)}{2(\mu_n^2+h_1^2)(\mu_n^2+h_2^2)} \quad (n=1,\ 2,\ \ldots).$$

En el caso particular cuando $h_1=h_2$ la ecuación (1) toma la forma

$$\operatorname{tg}\mu=\frac{2h\frac{\mu}{l}}{\frac{\mu^2}{l^2}-h_2}, \qquad \lambda=\frac{\mu^2}{l^2}.$$

e) Las condiciones de frontera son

$$v(0) = 0, \quad v'(l) + hv(l) = 0,$$

los valores propios λ_n se determinan de la ecuación

$$\operatorname{tg}\mu = -\frac{\mu}{hl}, \quad \lambda_n = \frac{\mu_n^2}{l^2} \quad (n = 1, 2, \ldots),$$

las funciones propias son

$$v_n(x) = \operatorname{sen}\sqrt{\lambda_n}x,$$

el cuadrado de la norma es

$$\| v_n \|^2 = \frac{l}{2} + \frac{hl^2}{2(\mu_n^2 + h^2l^2)}.$$

f) Las condiciones de frontera son

$$v'(0) = 0, \quad v'(l) + hv(l) = 0,$$

los valores propios λ_n se determinan de la ecuación

$$\operatorname{tg}\mu = \frac{hl}{\mu}, \quad \lambda_n = \frac{\mu_n^2}{l^2},$$

las funciones propias son

$$v_n(x) = \cos\sqrt{\lambda_n}x,$$

el cuadrado de la norma es

$$\| v_n \|^2 = \frac{l}{2} + \frac{hl^2}{2(\mu_n^2 + h^2l^2)}.$$

18. La ecuación de las oscilaciones propias longitudinales de la barra heterogénea es de la forma

$$\frac{d}{dx}\left[E(x)\frac{dv}{dx}\right] + \lambda\rho v = 0, \quad E = \begin{cases} E_1 & (x < x_0), \\ E_2 & (x > x_0), \end{cases} \quad \rho = \begin{cases} \rho_1 & (x < x_0), \\ \rho_2 & (x > x_0). \end{cases}$$

a) Las condiciones de frontera son

$$v(0) = 0, \quad v(l) = 0,$$

los valores propios se determinan de la ecuación

$$a_1\rho_1 \operatorname{ctg}\frac{\sqrt{\lambda}}{a_1}x_0 + a_2\rho_2 \operatorname{ctg}\frac{\sqrt{\lambda}}{a_2}(l - x_0) = 0,$$

donde

$$a_1 = \sqrt{\frac{E_1}{\rho_1}}, \quad a_2 = \sqrt{\frac{E_2}{\rho_2}}.$$

las funciones propias son

$$v_n(x) \begin{cases} \dfrac{\operatorname{sen}\dfrac{\sqrt{\lambda_n}}{a_1}x}{\operatorname{sen}\dfrac{\sqrt{\lambda_n}}{a_1}x_0} & \text{para} \quad 0 < x < x_0, \\[4ex] \dfrac{\operatorname{sen}\dfrac{\sqrt{\lambda_n}}{a_2}(l - x)}{\operatorname{sen}\dfrac{\sqrt{\lambda_n}}{a_2}(l - x_0)} & \text{para} \quad x_0 < x < l, \end{cases}$$

el cuadrado de la norma es

$$\| v_n \|^2 = \frac{\rho_1 x_0}{2 \operatorname{sen}^2 \frac{\sqrt{\lambda_n}}{a_1} x_0} + \frac{\rho_2 (l - x_0)}{2 \operatorname{sen}^2 \frac{\sqrt{\lambda_n}}{a_2} (l - x_0)} \qquad (n = 1, 2, \ldots).$$

b) Las condiciones de frontera son

$$v'(0) = v'(l) = 0.$$

Los valores propios se determinan de la ecuación

$$a_1 \rho_1 \operatorname{tg} \frac{\sqrt{\lambda}}{a_1} x_0 + a_2 \rho_2 \operatorname{tg} \frac{\sqrt{\lambda}}{a_2} (l - x_0) = 0.$$

Las funciones propias son

$$v_n(x) \begin{cases} \dfrac{\cos \frac{\sqrt{\lambda_n}}{a_1} x}{\cos \frac{\sqrt{\lambda_n}}{a_1} x_0} & \text{para} \quad 0 < x < x_0, \\[2ex] \dfrac{\cos \frac{\sqrt{\lambda_n}}{a_2} (l - x)}{\cos \frac{\sqrt{\lambda_n}}{a_2} (l - x_0)} & \text{para} \quad x_0 < x < l, \end{cases}$$

el cuadrado de la norma es

$$\| v_n \|^2 = \frac{\rho_1 x_0}{2 \cos^2 \frac{\sqrt{\lambda_n}}{a_1} x_0} + \frac{\rho_2 (l - x_0)}{2 \cos^2 \frac{\sqrt{\lambda_n}}{a_2} (l - x_0)} \qquad (n = 1, 2, \ldots).$$

c) Las condiciones de frontera son

$$v'(0) - h_1 v(0) = 0, \qquad v'(l) + h_2 v(l) = 0.$$

Los valores propios se determinan de la ecuación

$$a_1 \rho_1 \frac{h_1 - \frac{\sqrt{\lambda}}{a_1} \operatorname{tg} \frac{\sqrt{\lambda}}{a_1} x_0}{\frac{\sqrt{\lambda}}{a_1} + h_1 \operatorname{tg} \frac{\sqrt{\lambda}}{a_1} x_0} + a_2 \rho_2 \frac{h_2 - \frac{\sqrt{\lambda}}{a_2} \operatorname{tg} \frac{\sqrt{\lambda}}{a_2} (l - x_0)}{\frac{\sqrt{\lambda}}{a_2} + h_2 \operatorname{tg} \frac{\sqrt{\lambda}}{a_2} (l - x_0)} = 0$$

donde

$$a_1 = \sqrt{\frac{E_1}{\rho_1}}, \quad a_2 = \sqrt{\frac{E_2}{\rho_2}}.$$

Las funciones propias son

$$v_n(x)=\begin{cases}\dfrac{X_n(x)}{X_n(x_0)} & \text{para} \quad 0<x<x_0\\ \dfrac{Y_n(x)}{Y_n(x_0)} & \text{para} \quad x_0<x<l\end{cases} \qquad (n=1,\ 2,\ \ldots),$$

$$X_n(x)=\sqrt{\lambda_n}\cos\frac{\sqrt{\lambda_n}}{a_1}x+a_1h_1\operatorname{sen}\frac{\sqrt{\lambda_n}}{a_1}x,$$

$$Y_n(x)=\sqrt{\lambda_n}\cos\frac{\sqrt{\lambda_n}}{a_2}(l-x)+a_2h_2\operatorname{sen}\frac{\sqrt{\lambda_n}}{a_2}(l-x).$$

El cuadrado de la norma es

$$\|v_n\|^2=\frac{\rho_1}{X_n^2(x_0)}\int_0^{x_0}X_n^2(x)\,dx+\frac{\rho_2}{Y_n^2(x_0)}\int_{x_0}^{l}Y_n^2(x)\,dx.$$

Indicación. Se exige hallar las soluciones no triviales

$$v(x)=\begin{cases}\bar{v}(x) & \text{para} \quad 0<x<x_0,\\ \bar{\bar{v}}(x) & \text{para} \quad x_0<x<l\end{cases}$$

de las ecuaciones homogéneas

$$\bar{v}''+\frac{\lambda}{a_1^2}\bar{v}=0, \qquad \bar{\bar{v}}''+\frac{\lambda}{a_2^2}\bar{\bar{v}}=0,$$

que satisfacen las condiciones de frontera a) o b), o c), y las condiciones de conjugación en el lugar de la discontinuidad de los coeficientes de la ecuación

$$\bar{v}=\bar{\bar{v}}, \qquad E_1\bar{v}'=E_2\bar{\bar{v}}' \qquad \text{para} \qquad x=x_0.$$

Es conveniente buscar la solución en la forma

$$v(x)=\begin{cases}\dfrac{X(x)}{X(x_0)} & \text{para } 0<x<x_0,\\ \dfrac{Y(x)}{Y(x_0)} & \text{para} \quad x_0<x<l,\end{cases}$$

donde $X(x)$ satisface la ecuación $X''+\frac{\lambda}{a_1^2}X=0$ y la condición de frontera para $x=0$, e $Y(x)$ satisface la ecuación $Y''+\frac{\lambda}{a_1^2}Y=0$ y la condición de frontera para $x=l$.

Las funciones propias son ortogonales con peso $\rho(x)$:

$$\int_0^l v_n(x)\, v_m(x)\, \rho(x)\, dx = \rho_1 \int_0^{x_0} X_n(x)\, X_m(x)\, dx +$$

$$+ \rho_2 \int_{x_0}^{l} Y_n(x)\, Y_m(x)\, dx = 0, \qquad m \neq n,$$

$$\| v_n \|^2 = \int_0^l v_n^2(x)\, \rho(x)\, dx = \frac{\rho_1}{X_n^2(x_0)} \int_0^{x_0} X_n^2(x)\, dx + \frac{\rho_2}{Y_n^2(x_0)} \int_{x_0}^{l} Y_n^2\, dx.$$

19. El peso está en el extremo $x = l$. La condición de frontera en este extremo es de la forma

$$v'(l) = \frac{M}{\rho} \lambda v(l).$$

Las funciones propias $\{v_n(x)\}$ satisfacen la condición de ortogonalidad con la carga

$$\int_0^l v_m(x)\, v_n(x)\, \rho(x)\, dx + M v_m(l)\, v_n(l) = 0 \quad \text{para} \quad m \neq n$$

El cuadrado de la norma de la función propia $v_n(x)$ se determina por la fórmula

$$\| v_n \|^2 = \int_0^l v_n^2(x)\, \rho(x)\, dx + M v_n^2(l) \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots).$$

a) El extremo $x = 0$ está fijo rígidamente, $v(0) = 0$.

Los valores propios se determinan de la ecuación $\operatorname{ctg} \sqrt{\lambda_n} l = \frac{M}{\rho} \sqrt{\lambda_n}$, las funciones propias son

$$v_n(x) = \frac{\operatorname{sen} \sqrt{\lambda_n} x}{\operatorname{sen} \sqrt{\lambda_n} l} \quad (n = 1, 2, 3, \ldots),$$

el cuadrado de la norma es

$$\| v_n \|^2 = \frac{l\rho}{2} + \frac{M^2}{2\rho} \lambda_n l + \frac{M}{2}.$$

Las fórmulas de las correcciones de los valores propios:

1) si el peso M es pequeño, entonces

$$\lambda_n = \lambda_n^{(1)} \left(1 - \frac{2M}{\rho l} + \ldots \right),$$

donde $\lambda_n^{(1)} = \left[\frac{\pi(2n+1)}{2l} \right]^2$ son los valores propios de la barra no cargada con el extremo libre;

2) si l el peso M es grande, entonces

$$\lambda_n = \lambda_n^{(2)} + \frac{2\rho}{Ml} + \ldots,$$

donde $\lambda_n^{(2)} = \left(\frac{\pi n}{l}\right)^2$ son los valores propios de la barra con el extremo $= l$ fijo rígidamente.

b) El extremo $x = 0$ está libre, $v'(0) = 0$.

Los valores propios se determinan de la ecuación $\operatorname{tg} \sqrt{\lambda_n} l = -\frac{M}{\rho} \sqrt{\lambda_n}$. Las funciones propias son

$$v_n(x) = \cos \frac{\cos \sqrt{\lambda_n} x}{\cos \sqrt{\lambda_n} l} \quad (n = 1, 2, 3, \ldots),$$

el cuadrado de la norma es

$$\| v_n \|^2 = \frac{\rho l}{2} \left(1 + \frac{M^2}{\rho^2} \lambda_n\right) + \frac{M}{2}$$

c) El extremo $x = 0$ está fijo elásticamente, $v'(0) - hv(0) = 0$.

Los valores propios λ_n se determinan de la ecuación

$$\operatorname{tg} \sqrt{\lambda_n} l = \frac{h - \frac{M}{\rho} \lambda_n}{\left(1 + \frac{M}{\rho} h\right) \sqrt{\lambda_n}} \quad (n = 1, 2, 3, \ldots).$$

Las funciones propias son

$$v_n(x) = \frac{X_n(x)}{X_n(l)},$$

$$X_n(x) = \sqrt{\lambda_n} \cos \sqrt{\lambda_n} x + h \operatorname{sen} \sqrt{\lambda_n} x.$$

El cuadrado de la norma es

$$\| v_n \|^2 = \frac{1}{X_n^2(l)} \| X_n \|^2.$$

Indicación. La condición dinámica de la carga del extremo $x = l$ es de la forma $Mu_{tt} = -Eu_x(l, t)$. Suponiendo $u(x, t) = v(x) T(t)$, obtenemos después de la separación de variables para $v(x)$ la ecuación

$$v'' + \lambda v = 0, \quad v'(l) = \frac{M}{\rho} \lambda v(l)$$

La condición de ortogonalidad se deduce de la fórmula de Green

$$\int_0^l [v_n L(v_m) - v_m L(v_n)]\, dx = [v_n v_n' - v_m v_n']_0^l,$$

donde

$$L(v) = (Ev')'.$$

Para calcular la norma se debe utilizar la ecuación característica.

20. La masa concentrada M está en el punto $x = x_0$.

a) Ambos extremos de la cuerda están fijos rígidamente,

$$v(0) = 0, \quad v(l) = 0.$$

Los valores propios λ_n se determinan de la ecuación

$$\operatorname{ctg} \frac{\sqrt{\lambda_n}}{a} x_0 + \operatorname{ctg} \frac{\sqrt{\lambda_n}}{a}(l - x_0) = \frac{M}{a\rho} \sqrt{\lambda_n}.$$

Las funciones propias son

$$v_n(x) = \begin{cases} \dfrac{\operatorname{sen} \frac{\sqrt{\lambda_n}}{a} x}{\operatorname{sen} \frac{\sqrt{\lambda_n}}{a} x_0} & \text{para } 0 < x < x_0, \\[2ex] \dfrac{\operatorname{sen} \frac{\sqrt{\lambda_n}}{a}(l - x)}{\operatorname{sen} \frac{\sqrt{\lambda_n}}{a}(l - x_0)} & \text{para } x_0 < x < l. \end{cases}$$

El cuadrado de la norma es

$$\| v_n \|^2 = \frac{\rho x_0}{2 \operatorname{sen}^2 \frac{\sqrt{\lambda_n}}{a} x_0} + \frac{\rho (l - x_0)}{2 \operatorname{sen}^2 \frac{\sqrt{\lambda_n}}{a}(l - x_0)} + \frac{M}{2} \qquad (n = 1, 2, \ldots).$$

b) Ambos extremos de la cuerda están libres, $v'(0) = 0$, $v'(l) = 0$. Los valores propios λ_n se determinan de la ecuación

$$\operatorname{tg} \frac{\sqrt{\lambda_n}}{a} x_0 + \operatorname{tg} \frac{\sqrt{\lambda_n}}{a}(l - x_0) = -\frac{M}{a\rho} \sqrt{\lambda_n}.$$

Las funciones propias son

$$v_n(x) = \begin{cases} \dfrac{\cos \frac{\sqrt{\lambda_n}}{a} x}{\cos \frac{\sqrt{\lambda_n}}{a} x_0} & \text{para } 0 < x < x_0, \\[2ex] \dfrac{\cos \frac{\sqrt{\lambda_n}}{a}(l - x)}{\cos \frac{\sqrt{\lambda_n}}{a}(l - x_0)} & \text{para } x_0 < x < l. \end{cases}$$

El cuadrado de la norma es

$$\| v_n \|^2 = \frac{\rho x_0}{2 \cos^2 \frac{\sqrt{\lambda_n}}{a} x_0} + \frac{\rho (l - x_0)}{2 \cos^2 \frac{\sqrt{\lambda_n}}{a}(l - x_0)} + \frac{M}{2}, \qquad (n = 1, 2, \ldots).$$

c) Los extremos de la cuerda están fijos elásticamente,

$$v'(0)-h_1 v(0)=0, \qquad v'(l)+h_2 v(l)=0.$$

Los valores propios se determinan de la ecuación

$$\frac{ah_2-\sqrt{\lambda}\,\mathrm{tg}\,\frac{\sqrt{\lambda}}{a}(l-x_0)}{ah_2\,\mathrm{tg}\,\frac{\sqrt{\lambda}}{a}(l-x_0)+\sqrt{\lambda}}+\frac{ah_1-\sqrt{\lambda}\,\mathrm{tg}\,\frac{\sqrt{\lambda}}{a}x_0}{ah_1\,\mathrm{tg}\,\frac{\sqrt{\lambda}}{a}x_0+\sqrt{\lambda}}=\sqrt{\lambda}\,\frac{aM}{k}.$$

Las funciones propias son

$$v_n(x)=\begin{cases}\dfrac{X_n(x)}{X_n(x_0)} & \text{para} \quad 0<x<x_0,\\[2mm] \dfrac{Y_n(x)}{Y_n(x_0)} & \text{para} \quad x_0<x<l,\end{cases}$$

$$X_n(x)=\sqrt{\lambda_n}\cos\frac{\sqrt{\lambda_n}}{a}x+ah_1\,\mathrm{sen}\,\frac{\sqrt{\lambda_n}}{a}x,$$

$$Y_n(x)=\sqrt{\lambda_n}\cos\frac{\sqrt{\lambda_n}}{a}(l-x)+ah_2\,\mathrm{sen}\,\frac{\sqrt{\lambda_n}}{a}(l-x).$$

El cuadrado de la norma es

$$\|v_n\|^2=\int_0^l v_n^2(x)\,\rho\,dx+Mv_n^2(x_0) \qquad (n=1,\ 2,\ \ldots).$$

21. La ecuación de las oscilaciones transversales propias de la barra homogénea es de la forma

$$v^{(IV)}-\frac{\lambda}{a^2}v=0,$$

donde $a^2=\frac{EJ}{\rho S}$; E es el módulo de elasticidad; J, el momento de inercia de la sección transversal respecto a su eje horizontal; ρ, la densidad de la barra; S, el área de su sección transversal.

a) Ambos extremos están fijos rígidamente

$$v=0, \quad v'=0 \quad \text{para} \quad x=0, \quad x=l,$$

$$\lambda_n=a^2\frac{\mu_n^4}{l^4} \qquad (n=1,\ 2,\ \ldots),$$

donde μ_n es la raíz de la ecuación

$$\mathrm{ch}\,\mu\cos\mu=1.$$

La función propia es

$$v_n(x)=A_n\left\{\left(\mathrm{ch}\,\mu_n\frac{x}{l}-\cos\mu_n\frac{x}{l}\right)(\mathrm{sh}\,\mu_n-\mathrm{sen}\,\mu_n)-\right.$$

$$\left.-(\mathrm{ch}\,\mu_n-\cos\mu_n)\left(\mathrm{sh}\,\mu_n\frac{x}{l}-\mathrm{sen}\,\mu_n\frac{x}{l}\right)\right\},$$

donde A_n es un factor arbitrario.

b) Ambos extremos están libres,

$$v'' = 0, \quad v''' = 0 \quad \text{para} \quad x = 0, \quad x = l,$$

$$\lambda_n = a^2 \frac{\mu_n^4}{l^4} \quad (n = 1, 2, \ldots),$$

donde μ_n es la raíz de la ecuación

$$\text{ch}\, \mu \cos \mu = 1,$$

$$v_n(x) = A_n \left\{ \left(\text{ch} \frac{\mu_n}{l} x + \cos \frac{\mu_n}{l} x \right) (\text{sh}\, \mu_n - \text{sen}\, \mu_n) - \right.$$

$$\left. - (\text{ch}\, \mu_n + \cos \mu_n) \left(\text{sh} \frac{\mu_n}{l} x - \text{sen} \frac{\mu_n}{l} x \right) \right\}.$$

c) Un extremo ($x = 0$) está fijo, el segundo extremo ($x = l$) está libre, $v = 0$, $v' = 0$ para $x = 0$; $v'' = 0$, $v''' = 0$, para $x = l$,

$$\lambda_n = a^2 \frac{\mu_n^4}{l^4} \quad (n = 1, 2, \ldots),$$

donde μ_n es la raíz de la ecuación

$$\text{ch}\, \mu \cos \mu = -1,$$

$$v_n(x) = A_n \left\{ \left(\text{ch} \frac{\mu_n}{l} x - \cos \frac{\mu_n}{l} x \right) (\text{sh}\, \mu_n - \text{sen}\, \mu_n) - \right.$$

$$\left. - (\text{ch}\, \mu_n - \cos \mu_n) \left(\text{sh} \frac{\mu_n}{l} x - \text{sen} \frac{\mu_n}{l} x \right) \right\}.$$

2. Oscilaciones propias de los volúmenes

22. Sean $x = 0$, $x = a$, $y = 0$, $y = b$ los lados del rectángulo.
a) Si la frontera de la membrana está fija rígidamente ($v = 0$ para $x = 0$, a; $y = 0$, b), entonces los valores propios son

$$\lambda_{m,n} = \pi^2 \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right) \quad (m, n = 1, 2, \ldots),$$

las funciones propias son

$$v_{m,n}(x, y) = \text{sen} \frac{\pi m}{a} x \,\text{sen} \frac{\pi n}{b} y,$$

$$\| v_{m,n} \|^2 = \frac{ab}{4}.$$

b) La frontera de la membrana está libre ($v_x = 0$ para $x = 0$, a; $v_y = 0$ para $y = 0$, b),

$$\lambda_{m,n} = \pi^2 \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right) \quad (m, n = 0, 1, 2, \ldots),$$

$$v_{m,n}(x, y) = \cos \frac{\pi m}{a} x \cos \frac{\pi n}{b} y,$$

$$\| v_{m,n} \|^2 = \frac{ab}{4} \varepsilon_m \varepsilon_n, \quad \varepsilon_0 = 2, \quad \varepsilon_k = 1, \quad k \neq 0.$$

c) Dos lados opuestos $x = 0$, $x = a$, están fijos rígidamente ($v = 0$ para $x = 0$, a) y otros dos ($y = 0$ e $y = b$) están libres ($v_y = 0$ para $y = 0$, b),

$$\lambda_{m,n} = \pi^2 \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2}\right) \quad (m = 1, 2, \ldots;\ n = 0, 1, 2, \ldots),$$

$$v_{m,n}(x, y) = \operatorname{sen} \frac{\pi m}{a} x \cos \frac{\pi n}{b} y,$$

$$\| v_{m,n} \|^2 = \frac{1}{4} ab\varepsilon_n.$$

e) Dos lados adyacentes $x = 0$ y $y = 0$ están fijos rígidamente y otros dos están libres

$$\lambda_{m,n} = \frac{\pi^2}{4}\left[\frac{(2m+1)^2}{a^2} + \frac{(2n+1)^2}{b^2}\right] \quad (m, n = 0, 1, 2, \ldots),$$

$$v_{m,n}(x, y) = \operatorname{sen} \frac{\pi(2m+1)}{2a} x \operatorname{sen} \frac{\pi(2n+1)}{2b} y,$$

$$\| v_{m,n} \|^2 = \frac{ab}{4}.$$

f) Todas las aristas de la membrana rectangular están fijas elásticamente,

$$v_x(0, y) - h_1 v(0, y) = 0, \quad v_x(a, y) + h_2 v(a, y) = 0,$$
$$v_y(x, 0) - h_3 v(x, 0) = 0, \quad v_y(x, b) + h_4 v(x, b) = 0.$$

Los valores propios $\lambda_{m,n}$ se determinan de la ecuación

$$\lambda_{m,n} = [\mu_m^{(1)}]^2 + [\mu_n^{(2)}]^2 \quad (n = 1, 2, \ldots),$$

donde $\mu_m^{(1)}$ y $\mu_n^{(2)}$ son las raíces de las ecuaciones

$$\operatorname{tg}(\mu^{(1)}a) = \frac{(h_1 + h_2)\mu^{(1)}}{(\mu^{(1)})^2 - h_1 h_2}, \qquad \operatorname{tg}(\mu^{(2)}b) = \frac{(h_3 + h_4)\mu^{(2)}}{(\mu^{(2)})^2 - h_3 h_4},$$

$$v_{m,n}(x, y) = [\mu_m^{(1)} \cos \mu_m^{(1)} x + h_1 \operatorname{sen} \mu_m^{(1)} x]\,[\mu_n^{(2)} \cos \mu_n^{(2)} y + h_3 \operatorname{sen} \mu_n^{(2)} y] \times$$
$$\times \frac{1}{\sqrt{(\mu_m^{(1)})^2 + h_1^2}\ \sqrt{(\mu_n^{(2)})^2 + h_3^2}},$$

$$\| v_{m,n} \|^2 = \left\{\frac{a}{2} + \frac{(h_1 + h_2)[(\mu_m^{(1)})^2 + h_1 h_2]}{2[(\mu_m^{(1)})^2 + h_1^2][(\mu_m^{(1)})^2 + h_2^2]}\right\} \times$$
$$\times \left\{\frac{b}{a} + \frac{(h_3 + h_4)[(\mu_n^{(2)})^2 + h_3 h_4]}{2[(\mu_n^{(2)})^2 + h_3^2][(\mu_n^{(2)})^2 + h_4^2]}\right\}.$$

23. El origen del sistema polar de coordenadas (ρ, φ) colocamos en el centro del círculo, el radio del círculo es igual a a.

a) La membrana está fija rígidamente, $v|_{\rho=a} = 0$.

Los valores propios son $\lambda_{m,n} = \left(\frac{\mu_m^{(n)}}{a}\right)^2$, donde $\mu_m^{(n)}$ son las raíces de la ecuación $J_n(\mu) = 0$,

$$v_{m,n} = J_n\left(\frac{\mu_m^{(n)}}{a}\rho\right)\begin{Bmatrix}\cos n\varphi \\ \operatorname{sen} n\varphi\end{Bmatrix} \quad (n = 0, 1, 2, \cdots;\quad m = 1, 2, \ldots),$$

$$\| v_{m,n} \|^2 = \frac{a^2 \pi \varepsilon_n}{2}[J_n'(\mu_m^{(n)})]^2, \quad \varepsilon_n = \begin{cases} 2, & n = 0 \\ 1, & n \neq 0. \end{cases}$$

En particular, para $n=0$

$$v=v_m=J_0\left(\frac{\mu_m^{(0)}}{a}\rho\right), \quad \|v_m\|^2=a^2\pi J_1^2(\mu_m^0).$$

b) La frontera $\rho=a$ de la membrana está libre $\left(\frac{\partial v}{\partial\rho}=0 \text{ para } \rho=a\right)$,

$$\lambda_{m,n}=\left(\frac{\mu_m^{(n)}}{a}\right)^2,$$

donde $\mu_m^{(n)}$ es la raíz de la ecuación $J_n'(\mu)=0$,

$$v_{m,n}(\rho,\varphi)=J_n\left(\frac{\mu_m^{(n)}}{a}\rho\right)\begin{cases}\cos n\varphi,\\ \operatorname{sen} n\varphi,\end{cases}$$

$$\|v_{m,n}\|^2=\frac{a^2\pi\varepsilon_n}{2[\mu_m^{(n)}]^2}[(\mu_m^{(n)})^2-n^2]J_n^2(\mu_m^{(n)}) \quad (m=1, 2, \ldots, n=0, 1, 2, \ldots).$$

c) La frontera de la membrana está fija elásticamente $\left(\frac{\partial v}{\partial\rho}+hv\right)_{\rho=a}=$ $=0$,

$$\lambda_{m,n}=\left(\frac{\mu_m^{(n)}}{a}\right)^2,$$

donde $\mu_m^{(n)}$ es la raíz número m de la ecuación

$$\mu J_n'(\mu)+ahJ_n(\mu)=0,$$

$$v_{m,n}(\rho,\varphi)=J_n\left(\frac{\mu_m^{(n)}}{a}\rho\right)\begin{cases}\cos n\varphi,\\ \operatorname{sen} n\varphi\end{cases} \quad (n=0, 1, 2, \ldots; m=1, 2, \ldots),$$

$$\|v_{m,n}\|^2=\frac{\pi a^2\varepsilon_n}{2[\mu_m^{(n)}]^2}[a^2h^2+[\mu_m^{(n)}]^2-n^2]J_n^2(\mu_m^{(n)}) \tag{1}$$

ó

$$\|v_{m,n}\|^2=\frac{\pi a^2\varepsilon_n}{2}\left[1+\frac{(\mu_m^{(n)})^2-n^2}{a^2h^2}\right][J_n'(\mu_m^{(n)})]^2. \tag{2}$$

La fórmula (1) es conveniente para h pequeños, la fórmula (2), para h grandes. El paso al límite en (1) cuando $h\to 0$, da la expresión de $\|v_{m,n}\|^2$ del problema b); el paso al límite en la fórmula (2) cuando $h\to\infty$ da $\|v_{m,n}\|^2$ para el primer problema de contorno a).

Indicación. Se exige resolver el problema de contorno para los valores propios

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial v}{\partial\rho}\right)+\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 v}{\partial\varphi^2}+\lambda v=0\ (\rho<a), \quad |v(0,\varphi)|<\infty$$

a) $v(a,\varphi)=0$, b) $\frac{\partial v}{\partial\rho}(a,\varphi)=0$, c) $\frac{\partial v}{\partial\rho}(a,\varphi)+hv(a,\varphi)=0$.

La solución se busca en forma del producto $v(\rho,\varphi)=R(\rho)\,\Phi(\varphi)$.
El método de cálculo de la norma está indicado en [7], (pág. 000).
Deducir la fórmula general

$$\left\|J_n\left(\frac{\mu}{a}\rho\right)\right\|^2=\frac{a^2}{2}\left[J_n'^2(\mu)+\left(1-\frac{n^2}{\mu^2}\right)J_n^2(\mu)\right].$$

15—0942

24. Indicamos por a, b, c, las aristas del paralelepípedo.
a) Si $v=0$ para $x=0, a$; $y=0, b$; $z=0, c$, entonces

$$\lambda_{m,n,k}=\pi^2\left(\frac{m^2}{a^2}+\frac{n^2}{b^2}+\frac{k^2}{c^2}\right) \quad (m, n, k=1, 2, 3, \ldots),$$

$$v_{m,n,k}=\operatorname{sen}\frac{\pi m}{a}x \operatorname{sen}\frac{\pi n}{b}y \operatorname{sen}\frac{\pi k}{c}z, \quad \|v_{m,n,k}\|^2=\frac{abc}{8}.$$

Las funciones propias normadas son

$$\bar{v}_{m,n,k}=\sqrt{\frac{8}{abc}}\,v_{m,n,k}.$$

b) Si están dadas las condiciones de frontera de segundo género
$v_x=0$ para $x=0, a$; $v_y=0$ para $y=0, b$; $v_z=0$ para $z=0, c$, entonces

$$\lambda_{m,n,k}=\pi^2\left(\frac{m^2}{a^2}+\frac{n^2}{b^2}+\frac{k^2}{c^2}\right) \quad (m, n, k=0, 1, 2, \cdots),$$

$$v_{m,n,k}=\cos\frac{\pi m}{a}x\cos\frac{\pi n}{b}y\cos\frac{\pi k}{c}z,$$

$$\|v_{m,n,k}\|^2=\frac{abc}{8}\varepsilon_m\varepsilon_n\varepsilon_k, \qquad \varepsilon_j=\begin{cases}2, & j=0,\\ 1, & j\neq 0.\end{cases}$$

Las funciones propias normadas son

$$\bar{v}_{m,n,k}=\frac{1}{\|v_{m,n,k}\|}v_{m,n,k}.$$

c) Para el tercer problema de contorno

$$(v_x-h_1v)_{x=0}=0, \quad (v_x+h_2v)_{x=a}=0,$$
$$(v_y-h_3v)_{y=0}=0, \quad (v_y+h_4v)_{y=b}=0,$$
$$(v_z-h_5v)_{z=0}=0, \quad (v_z+h_6v)_{z=c}=0$$

tenemos

$$\lambda_{m,n,k}=[\mu_m^{(1)}]^2+[\mu_n^{(2)}]^2+[\mu_k^{(3)}]^2,$$

donde $\mu_m^{(1)}$, $\mu_n^{(2)}$, $\mu_k^{(3)}$ son las raíces de las ecuaciones siguientes

$$\operatorname{tg}\mu^{(1)}a=\frac{(h_1+h_2)\,\mu^{(1)}}{[\mu^{(1)}]^2-h_1h_2}, \quad \operatorname{tg}\mu^{(2)}b=\frac{(h_3+h_4)\,\mu^{(2)}}{[\mu^{(2)}]^2-h_3h_4}, \quad \operatorname{tg}\mu^{(3)}c=\frac{(h_5+h_6)\,\mu^{(3)}}{[\mu^{(3)}]^2-h_5h_6},$$

$$v_{m,n,k}=X_m(x)\,Y_n(y)\,Z_k(z),$$

$$X_m(x)=(\mu_m^{(1)}\cos\mu_m^{(1)}x+h_1\operatorname{sen}\mu_m^{(1)}x)\frac{1}{\sqrt{(\mu_m^{(1)})^2+h_1^2}},$$

$$Y_n(y)=(\mu_n^{(2)}\cos\mu_n^{(2)}y+h_3\operatorname{sen}\mu_n^{(2)}y)\frac{1}{\sqrt{(\mu_n^{(2)})^2+h_3^2}},$$

$$Z_k(z)=(\mu_k^{(3)}\cos\mu_k^{(3)}z+h_5\operatorname{sen}\mu_k^{(3)}z)\frac{1}{\sqrt{(\mu_k^{(3)})^2+h_5^2}},$$

$$\|v_{m,n,k}\|^2=\left\{\frac{a}{2}+\frac{(h_1+h_2)\,[(\mu_m^{(1)})^2+h_1h_2]}{2\,[(\mu_m^{(1)})^2+h_1^2]\,[(\mu_m^{(1)})^2+h_2^2]}\right\}\times$$

$$\times\left\{\frac{b}{2}+\frac{(h_3+h_4)\,[(\mu_n^{(2)})^2+h_3h_4]}{2\,[(\mu_n^{(2)})^2+h_3^2]\,[(\mu_n^{(2)})^2+h_4^2]}\right\}\left\{\frac{c}{2}+\frac{(h_5+h_6)\,[(\mu_k^{(3)})^2+h_5h_6]}{2\,[(\mu_k^{(3)})^2+h_5^2]\,[(\mu_k^{(3)})^2+h_6^2]}\right\},$$

$$m,\ n,\ k=1,\ 2,\ 3,\ \ldots$$

25. Elegimos el sistema esférico de coordenadas $(r,\ \theta,\ \varphi)$ con el origen en el centro de la esfera de radio a. La ecuación inicial es

$$\Delta v+\lambda v=0$$

ó

$$\frac{1}{r^2}\,\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\,\frac{\partial v}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2\operatorname{sen}\theta}\,\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\operatorname{sen}\theta\,\frac{\partial v}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{r^2\operatorname{sen}^2\theta}\,\frac{\partial^2 v}{\partial\varphi^2}+\lambda v=0.$$

a) El primer problema de contorno: $v=0$ para $r=a$,

$$\lambda_{n,m}=\left(\frac{\mu_m^{\left(n+\frac{1}{2}\right)}}{1}\right)^2\qquad(n=0,\ 1,\ 2,\ \ldots;\ m=1,\ 2,\ \ldots),\tag{1}$$

donde $\mu_m^{\left(n+\frac{1}{2}\right)}$ es la raíz número m de la ecuación

$$J_{n+\frac{1}{2}}(\mu)=0,\tag{2}$$

$$v_{m,n,l}=\psi_n\left(\frac{\mu_m^{\left(n+\frac{1}{2}\right)}}{a}\right)Y_n^{(l)}(\theta,\ \varphi),\qquad l=0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \ldots,\ \pm n,\tag{3}$$

donde

$$Y_n^{(l)}(\theta,\ \varphi)=P_n^{(l)}(\cos\theta)\left\{\begin{matrix}\cos l\varphi & \text{para} & l>0,\\ \operatorname{sen} l\varphi & \text{para} & l<0,\end{matrix}\right\}\tag{4}$$

$$P_n^{(l)}(x)=(1-x^2)^{\frac{l}{2}}\,\frac{d^l}{dx^l}P_n(x),\quad \text{la función asociada,}$$

$$P_n^{(0)}=P_n(x),\quad \text{el polinomio de Legende,}$$

$$\psi_n(x)=\sqrt{\frac{\pi}{2x}}\,J_{n+\frac{1}{2}}(x),\tag{5}$$

$$\|v_{m,n,l}\|^2=\left\|\psi_n\left(\frac{\mu_m^{\left(n+\frac{1}{2}\right)}}{a}\,r\right)\right\|^2\|Y_n^{(l)}(\theta,\ \varphi)\|^2,\tag{6}$$

$$\|Y_n^{(l)}(\theta,\ \varphi)\|^2=\frac{2\pi\varepsilon_l\,(n+l)!}{(2n+1)\,(n-l)!},\qquad \varepsilon_l=\left\{\begin{matrix}2, & l=0,\\ 1, & l\neq 0,\end{matrix}\right\}\tag{7}$$

$$\left\|\psi_n\left(\frac{\mu_m^{\left(n+\frac{1}{2}\right)}}{a}\right)\right\|^2=\frac{\pi a}{2\mu_m^{\left(n+\frac{1}{2}\right)}}\,\frac{a^2}{2}\left[J'_{n+\frac{1}{2}}\left(\mu_m^{\left(n+\frac{1}{2}\right)}\right)\right]^2.\tag{8}$$

b) El segundo problema de contorno es: $\frac{\partial v}{\partial r}=0$ para $r=a$. Las fórmulas (1), (3)—(7) siguen siendo válidas; solo que en este caso por $\mu_m^{\left(n+\frac{1}{2}\right)}$ se debe entender la raíz de la ecuación

$$\psi_n'(\mu)=0,$$

ó

$$J'_{n+\frac{1}{2}}(\mu)-\frac{1}{2\mu}J_{n\frac{1}{2}}(\mu)=0,$$

$$\left\|\psi_n\left(\frac{\mu_m^{\left(n+\frac{1}{2}\right)}}{a}r\right)\right\|=\frac{\pi a^3}{4\left[\mu_m^{\left(n+\frac{1}{2}\right)}\right]}\left(1-\frac{n(n+1)}{\left[\mu_m^{\left(n+\frac{1}{2}\right)}\right]^2}\right)J^2_{n+\frac{1}{2}}\left(\mu_m^{\left(n+\frac{1}{2}\right)}\right). \quad (9)$$

c) El tercer problema de contorno es:

$$\frac{\partial v}{\partial r}+hv=0 \quad \text{para} \quad r=a.$$

Todas las fórmulas del problema 25 a) excepto las (2) y (8) siguen siendo válidas; $\mu_m^{\left(n+\frac{1}{2}\right)}$ ahora significa la raíz de la ecuación

$$\mu\psi_n'(\mu)+ah\,\psi_n(\mu)=0,$$

ó

$$J'_{n+\frac{1}{2}}(\mu)-\frac{1-2ah}{2\mu}J_{n+\frac{1}{2}}(\mu)=0, \quad (10)$$

$$\left\|\psi_n\left(\frac{\mu_m^{\left(n+\frac{1}{2}\right)}}{a}r\right)\right\|^2=$$

$$=\frac{\pi a^3}{4\mu_m^{\left(n+\frac{1}{2}\right)}}\left[1-\frac{n(n+1)\,ah\,(2-ah)}{\left(\mu_m^{\left(n+\frac{1}{2}\right)}\right)^2}\right]J^2_{n+\frac{1}{2}}\left(\mu_m^{\left(n+\frac{1}{2}\right)}\right). \quad (11)$$

26. Elegimos el sistema cilíndrico de coordenadas (ρ, φ, z), dirigiendo el eje z a lo largo del eje del cilindro y colocando el origen de las coordenadas sobre la base inferior, a, es el radio del cilindro; l, la altura del cilindro. La ecuación inicial del problema de contorno sobre los valores propios es de la forma

$$\Delta v+\lambda v=0$$

ó

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial v}{\partial\rho}\right)+\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 v}{\partial_2\varphi^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial z^2}+\lambda v=0.$$

a) El primer problema de contorno: $v=0$ para $\rho=a$, $z=0$, l,

$$\lambda_{m,n,k}=\left(\frac{\pi k}{l}\right)^2+\left(\frac{\mu_m^{(n)}}{a}\right)^2 \quad (n=0,\ 1,\ 2,\ \ldots;\quad m,\ k=1,\ 2,\ \ldots),$$

donde $\mu_m^{(n)}$ es la raíz número m de la ecuación $J_n(\mu)=0$,

$$v_{n,m,k}=\operatorname{sen}\frac{\pi k}{l}z J_n\left(\frac{\mu_m^{(n)}}{a}\rho\right)\begin{cases}\cos n\varphi,\\ \operatorname{sen} n\varphi,\end{cases}$$

$$\| v_{m,n,k}\|^2=\frac{l\pi a^2}{4}\varepsilon_n [J_n'(\mu_m^{(n)})]^2, \quad \varepsilon_n=\begin{cases}2, & n=0,\\ 1, & n\neq 0.\end{cases}$$

b) El segundo problema de contorno: $\frac{\partial v}{\partial\rho}=0$ para $\rho=a$, $\frac{\partial v}{\partial z}=0$ para $z=0$, l,

$$\lambda_{n,m,k}=\left(\frac{\mu_m^{(n)}}{a}\right)^2+\left(\frac{\pi k}{l}\right)^2 \quad (n=0, 1, 2, \ldots, m=1, 2, \ldots),$$

$$v_{m,n,k}=\cos\frac{\pi k}{l}z J_n\left(\frac{\mu_m^{(n)}}{a}\rho\right)\begin{cases}\cos n\varphi,\\ \operatorname{sen} n\varphi,\end{cases}$$

donde $\mu_m^{(n)}$ es la raíz número m de ecuación $J_n'(\mu)=0$,

$$\| v_{n,m,k}\|^2=\frac{l\pi a^2\varepsilon_n}{4[\mu_m^{(n)}]^2}[(\mu_m^{(n)})^2-n^2]\, J_n^2(\mu_m^{(n)}).$$

c) El tercer problema de contorno: $\frac{\partial v}{\partial\rho}+h_0 v=0$ para $\rho=a$, $\frac{\partial v}{\partial z}-h_1 v=0$ para $z=0$, $\frac{\partial v}{\partial z}+h_2 v=0$ para $z=l$,

$$v_{n,m,k}(\rho, \varphi, z)=Z_k(z) J_n\left(\frac{\mu_m^{(n)}}{a}\rho\right)\begin{cases}\cos n\varphi,\\ \operatorname{sen} n\varphi,\end{cases}$$

$Z_k(z)=\dfrac{\nu_k\cos\nu_k z+h_1\operatorname{sen}\nu_k z}{\sqrt{\nu_k^2+h_1^2}}$, ν_k es la raíz de la ecuación

$$\operatorname{tg}\nu l=\frac{(h_1+h_2)\nu}{\nu^2-h_1h_2}.$$

$\mu_m^{(n)}$, la raíz de la ecuación $\mu J_n'(\mu)+ah_0 J_n(\mu)=0$,

$$\lambda_{n,m,k}=\nu_k^2+\left(\frac{\mu_m^{(n)}}{a}\right)^2 \quad (m, k=1, 2, \ldots; n=0, 1, 2, \ldots),$$

$$\| v_{n,m,k}\|^2=\pi\varepsilon_n\left\| J_n\left(\frac{\mu_m^{(n)}}{a}\rho\right)\right\|^2\| Z_k(z)\|^2,$$

donde

$$\left\| J_n\left(\frac{\mu_m^{(n)}}{a}\right)\right\|^2=\frac{a^2}{2(\mu_m^{(n)})^2}[a^2h_0^2+(\mu_m^{(n)})^2-n^2]\, J_n^2(\mu_m^{(n)}),$$

$$\| Z_k\|^2=\frac{l}{2}+\frac{(h_1+h_2)(\nu_k^2+h_1h_2)}{2(\nu_k^2+h_1^2)(\nu_k^2+h_2^2)}.$$

Indicación. La solución se busca en forma de producto

$$v(\rho, \varphi, z)=V(\rho, \varphi)\, Z(z).$$

Después de la separación de variables para $V(\rho, \varphi)$ obtenemos el problema 23 y para $Z(z)$, el problema 17.

27. Se elige el sistema de coordenadas polares (ρ, φ).

a) El primer problema de contorno es: $v=0$ para $\rho=a$ y $\rho=b$,

$$v_{m,n}(\rho, \varphi)=R_{m,n}(\rho)\begin{cases}\cos n\varphi\\ \operatorname{sen} n\varphi\end{cases}\quad (m=1, 2, \ldots;\ n=0, 1, 2, \ldots),$$

$$R_{m,n}(\rho)=J_n(\mu_m^{(n)}\rho)\,N_n(\mu_m^{(n)}a)-J_n(\mu_m^{(n)}a)\,N_n(\mu_m^{(n)}\rho), \tag{1}$$

ó

$$R_{m,n}(\rho)=\frac{J_n(\mu_m^{(n)}a)}{J_n(\mu_m^{(n)}b)}\,[J_n(\mu_m^{(n)}\rho)\,N_n(\mu_m^{(n)}b)-J_n(\mu_m^{(n)}b)\,N_n(\mu_m^{(n)}\rho)], \tag{2}$$

donde $\mu_m^{(n)}$ es la raíz número m de la ecuación trascedente

$$J_n(a\mu)\,N_n(b\mu)-J_n(b\mu)\,N_n(a\mu)=0, \tag{3}$$

que se puede también escribir en la forma

$$\frac{J_n(a\mu)}{J_n(b\mu)}=\frac{N_n(a\mu)}{N_n(b\mu)}.$$

Aquí $N_n(x)$ es la función de Neumann de n-ésimo orden

$$\lambda_{m,n}=(\mu_m^{(n)})^2,$$

$$\|v_{m,n}\|^2=\pi\varepsilon_n\|R_{m,n}\|^2=\frac{2\varepsilon_n}{\pi[\mu_m^{(n)}]^2}\,\frac{J_n^2(\mu_m^{(n)}a)-J_n^2(\mu_m^{(n)}b)}{J_n^2(\mu_m^{(n)}b)}, \tag{4}$$

$$\varepsilon_n=\begin{cases}2, & n=0,\\ 1, & n\neq 0.\end{cases}$$

b) El segundo problema de contorno: $\dfrac{\partial v}{\partial\rho}=0$ para $\rho=a$, $\rho=b$,

$$v_{m,n}(\rho, \varphi)=R_{m,n}(\rho)\,\Phi_n(\varphi),$$

$$\Phi_n(\varphi)=\begin{cases}\cos n\varphi\\ \operatorname{sen} n\varphi\end{cases}\quad (n=0, 1, 2, \ldots),$$

$$R_{m,n}(\rho)=J_n(\mu_m^{(n)}\rho)\,N_n'(\mu_m^{(n)}a)-J_n'(\mu_m^{(n)}a)\,N_n(\mu_m^{(n)}\rho), \tag{5}$$

ó

$$R_{m,n}(\rho)=\frac{J_n'(a\mu_m^{(n)})}{J_n'(b\mu_m^{(n)})}\,[J_n(\mu_m^{(n)}\rho)\,N_n'(\mu_m^{(n)}b)-J_n'(\mu_m^{(n)}b)\,N_n(\mu_m^{(n)}\rho), \tag{5'}$$

donde $\mu_m^{(n)}$ es la raíz número m de la ecuación

$$\frac{J_n'(a\mu)}{J_n'(b\mu)}=\frac{N_n'(a\mu)}{N_n'(b\mu)}. \tag{6}$$

Los valores propios son

$$\lambda_{m,n}=(\mu_m^{(n)})^2,$$

$$\|v_{m,n}\|^2=\pi\varepsilon_n\|R_{m,n}\|^2=$$

$$=\frac{2\varepsilon_n}{\pi[\mu_m^{(n)}]^2}\left\{\left(1-\frac{n^2}{b^2[\mu_m^{(n)}]^2}\right)\frac{J_n'^2(\mu_m^{(n)}a)}{J_n'^2(\mu_m^{(n)}b)}-\left(1-\frac{n^2}{a^2[\mu_m^{(n)}]^2}\right)\right\}. \tag{7}$$

En particular, para $n=0$ tenemos:

$$\| v_{m,0} \|^2 = 2\pi \| R_{m,0} \|^2 = \frac{4}{\pi [\mu_m^{(0)}]^2} \frac{J_1^2(a\mu_m^{(0)}) - J_1^2(b\mu_m^{(0)})}{J_1^2(b\mu_m^{(0)})}.$$

c) El tercer problema de contorno: $\frac{\partial v}{\partial \rho} - hv = 0$ para $\rho = a$, $\frac{\partial v}{\partial \rho} + hv = 0$ para $\rho = b$,

$$v_{m,n}(\rho, \varphi) = R_{m,n}(\rho)\Phi_n(\varphi), \qquad \Phi_n(\varphi) = \begin{cases} \cos n\varphi, \\ \operatorname{sen} n\varphi, \end{cases}$$

$$R_{m,n}(\rho) = J_n(\mu_m^{(n)}\rho)\,\delta(a) - \Delta(a)\,N_n(\mu_m^{(n)}\rho), \tag{8}$$

ó

$$R_{m,n}(\rho) = \frac{\Delta(a)}{\Delta(b)} [J_n(\mu_m^{(n)}\rho)\,\delta(b) - \Delta(b)\,N_n(\mu_m^{(n)}\rho)], \tag{9}$$

donde

$$\left.\begin{aligned} \Delta(a) &= J_n'(\mu_m^{(n)}a) - \frac{h}{\mu_m^{(n)}} J_n(\mu_m^{(n)}a), \quad \Delta(b) = J_n'(\mu_m^{(n)}b) + \frac{h}{\mu_m^{(n)}} J_n(\mu_m^{(n)}b), \\ \delta(a) &= N_n'(\mu_m^{(n)}a) - \frac{h}{\mu_m^{(n)}} N_n(\mu_m^{(n)}a), \quad \delta(b) = N_n'(\mu_m^{(n)}b) + \frac{h}{\mu_m^{(n)}} N_n(\mu_m^{(n)}b). \end{aligned}\right\} \tag{10}$$

Los valores propios se determinan según la fórmula

$$\lambda_{m,n} = [\mu_m^{(n)}]^2 \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots, m = 1, 2, \ldots),$$

donde $\mu_m^{(n)}$ es la raíz número m de la siguiente ecuación:

$$\delta(a)\Delta(b) - \delta(b)\Delta(a) = 0 \quad \text{ó} \quad \frac{\delta(a)}{\delta(b)} = \frac{\Delta(a)}{\Delta(b)},$$

$$\| v_{m,n} \|^2 = \| \Phi_n \|^2 \| R_{m,n} \|^2 = \pi\varepsilon_n \| R_{m,n} \|^2,$$

$$\| R_{m,n} \|^2 = \frac{b^2}{2}\left[R'^2_{m,n}(b) + \left(1 - \frac{n^2}{b^2[\mu_m^{(n)}]^2}\right) R^2_{m,n}(b)\right] - \\ - \frac{a^2}{2}\left[R'^2_{m,n}(a) + \left(1 - \frac{n^2}{a^2[\mu_m^{(n)}]^2}\right) R^2_{m,n}(a)\right]. \tag{11}$$

Para $h=0$ tenemos:

$$\frac{\Delta(a)}{\Delta(b)} = \frac{J_n'(a\mu_m^{(n)})}{J_n'(b\mu_m^{(n)})}$$

y las fórmulas (8) y (11) se transforman en las fórmulas (5) y (7).

Indicación. Haciendo $v(\rho, \varphi) = R(\rho)\,\Phi(\varphi)$, obtenemos paral la función radial $R(\rho)$ el problema

$$\frac{1}{\rho}\frac{d}{d\rho}\left(\rho \frac{dR}{d\rho}\right) + \left(\lambda - \frac{n^2}{\rho^2}\right) R = 0,$$

$$R(a) = R(b) = 0 \text{ en el caso a)},$$

$$R'(a) = R'(b) = 0 \text{ en el caso b)}.$$

La solución general de la ecuación es de la forma $R_n(\rho) = AJ_n(\mu\rho) + BN_n(\mu\rho)$, $\mu = \sqrt{\lambda}$. Utilizando las condiciones de frontera para $\rho = a$ y $\rho = b$, obtenemos para $R_n(\rho)$ las expresiones dadas en la respuesta.

El cálculo de la norma se realiza mediante el método habitual.

Para $\| R_{m,n} \|^2$ se obtiene la fórmula general

$$\| R_{m,n} \|^2 = \frac{b^2}{2}\left[R'^2_{m,n}(\mu_m^{(n)}b) + \left(1 - \frac{n^2}{b^2[\mu_m^{(n)}]^2}\right) R^2_{m,n}(\mu_m^{(n)}b)\right] - \\ - \frac{a^2}{2}\left[R'^2_{m,n}(\mu_m^{(n)}a) + \left(1 - \frac{n^2}{a^2[\mu_m^{(n)}]^2}\right) R^2_{m,n}(\mu_m^{(n)}a)\right].$$

Para el cálculo de $R'_{m,n}(\mu_m^{(n)}\rho)$ y $R'_{m,n}(\mu_m^{(n)}\rho)$ para $\rho = a$ y $\rho = b$, se debe utilizar la expresión para el determinante de Wronski

$$J_n(x)\, N'_n(x) - N_n(x)\, J'_n(x) = \frac{2}{\pi x}.$$

28. Se exige resolver el problema de contorno

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial v}{\partial\rho}\right) + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 v}{\partial\varphi^2} + \lambda v = 0 \quad \text{para} \quad \rho < a, \quad 0 < \varphi < \varphi_0$$

con las condiciones de frontera

a) $v = 0$ para $\rho = a$, $\varphi = 0$, $\varphi = \varphi_0$;

b) $\dfrac{\partial v}{\partial\rho} = 0$ para $\rho = a$, $\dfrac{\partial v}{\partial\varphi} = 0$ para $\varphi = 0$, $\varphi = \varphi_0$;

c) $\dfrac{\partial v}{\partial\rho} + h_0 v = 0$ para $\rho = a$, $\dfrac{\partial v}{\partial\varphi} - h_1 v = 0$ para $\varphi = 0$,

$$\frac{\partial v}{\partial\varphi} + h_2 v = 0 \quad \text{para} \quad \varphi = \varphi_0.$$

Respuestas:

a) El primer problema de contorno para el sector

$$v_{m,n}(\rho, \varphi) = J_{\frac{\pi n}{\varphi_0}}\left(\frac{\mu_m^{(n)}}{a}\rho\right) \operatorname{sen}\frac{\pi n}{\varphi_0}\varphi \quad (m, n = 1, 2, \ldots),$$

$$\lambda_{m,n} = \left(\frac{\mu_m^{(n)}}{a}\right)^2,$$

donde $\mu_m^{(n)}$ es la raíz número m de la ecuación

$$J_{\frac{\pi n}{\varphi_0}}(\mu) = 0,$$

$$\| v_{m,n} \|^2 = \frac{a^2\varphi_0}{4}\left[J'_{\frac{\pi n}{\varphi_0}}(\mu_m^{(n)})\right]^2.$$

b) El segundo problema de contorno para el sector

$$v_{m,n}(\rho, \varphi) = J_{\frac{\pi n}{\varphi_0}}\left(\frac{\mu_m^{(n)}}{a}\rho\right)\cos\frac{\pi n}{\varphi_0}\varphi \quad (n=0, 1, 2, \ldots; \quad m=1, 2, \ldots),$$

$\lambda_{m,n} = \left(\frac{\mu_m^{(n)}}{a}\right)^2$, $\mu_m^{(n)}$, la raíz número m de la ecuación $J'_{\frac{\pi n}{\varphi_0}}(\mu)=0$,

$$\|v_{m,n}\|^2 = \frac{\varphi_0\varepsilon_n}{2}\left\|J_{\frac{\pi n}{\varphi_0}}\left(\frac{\mu_m^{(n)}}{a}\rho\right)\right\|^2 = \frac{\varphi_0\varepsilon_n a^2}{4}\left(1-\frac{n^2}{(\mu_m^{(n)})^2}\right)J^2_{\frac{\pi n}{\varphi_0}}(\mu_m^{(n)}).$$

La expresión para $\left\|J_{\frac{\pi n}{\varphi_0}}\left(\frac{\mu_m^{(n)}}{a}\rho\right)\right\|^2$ véase en la respuesta al problema 23.

c) El tercer problema de contorno para el sector

$$v_{m,n}(\rho, \varphi) = J_{\nu_n}\left(\frac{\mu_m^{(n)}}{a}\rho\right)\Phi_n(\varphi),$$

$$\Phi_n(\varphi) = \frac{\nu_n\cos\nu_n\varphi + h_1\operatorname{sen}\nu_n\varphi}{\sqrt{\nu_n^2+h_1^2}},$$

$$\lambda_m^{(n)} = \left(\frac{\mu_m^{(n)}}{a}\right)^2 \quad (m, n=1, 2, \ldots),$$

donde ν_n es la raíz positiva de la ecuación $\operatorname{tg}\nu\varphi_0 = \frac{(h_1+h_2)\nu}{\nu^2-h_1h_2}$; $\mu_m^{(n)}$, la raíz de la ecuación $\mu J'_{\nu_n}(\mu) + ah_0J_{\nu_n}(\mu)=0$,

$$\|v_{m,n}\|^2 = \|\Phi_n\|^2\left\|J_{\nu_n}\left(\frac{\mu_m^{(n)}}{a}\rho\right)\right\|^2,$$

$$\|\Phi_n\|^2 = \frac{\varphi_0}{2} + \frac{(h_1+h_2)(\nu_n^2+h_1h_2)}{2(\nu_n^2+h_1^2)(\nu_n^2+h_2^2)},$$

$$\left\|J_{\nu_n}\left(\frac{\mu_m^{(n)}}{a}\rho\right)\right\|^2 = \frac{a^2}{2}\left[1+\frac{(\mu_m^{(n)})^2-\nu_n^2}{a^2h_0^2}\right][J'_{\nu_n}(\mu_m^{(n)})]^2 = \frac{a^2}{2}\left[1+\frac{a^2h_0^2-\nu_n^2}{[\mu_m^{(n)}]^2}\right]J^2_{\nu_n}(\mu_m^{(n)}).$$

29. Se busca la solución de la ecuación

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial v}{\partial\rho}\right) + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 v}{\partial\varphi^2} + \lambda v = 0 \quad (a<\rho<b, \quad 0<\varphi<\varphi_0)$$

que satisface las condiciones homogéneas de frontera a) de primer género, b) de segundo género, c) de tercer género.

a) El primer problema de contorno: $v = 0$ para $\rho = a,\ b;\ \varphi = 0,\ \varphi_0$,

$$v_{m,n}(\rho,\ \varphi) = R_{m,n}(\rho)\,\Phi_n(\varphi),$$

$$\Phi_n(\varphi) = \operatorname{sen}\frac{\pi n}{\varphi_0}\varphi \quad (n = 1,\ 2,\ \ldots),$$

$$R_{m,n}(\rho) = J_{\frac{\pi n}{\varphi_0}}(\mu_m^{(n)}\rho)\,N_{\frac{\pi n}{\varphi_0}}(\mu_m^{(n)}a) - J_{\frac{\pi n}{\varphi_0}}(\mu_m^{(n)}a)\,N_{\frac{\pi n}{\varphi_0}}(\mu_m^{(n)}\rho),$$

ó

$$R_{m,n}(\rho) = \frac{J_{\frac{\pi n}{\varphi_0}}(\mu_m^{(n)}a)}{J_{\frac{\pi n}{\varphi_0}}(\mu_m^{(n)}b)}\left[J_{\frac{\pi n}{\varphi_0}}(\mu_m^{(n)}\rho)\,N_{\frac{\pi n}{\varphi_0}}(\mu_m^{(n)}b) - J_{\frac{\pi n}{\varphi_0}}(\mu_m^{(n)}b)\,N_{\frac{\pi n}{\varphi_0}}(\mu_m^{(n)}\rho)\right];$$

$\lambda_{m,n} = [\mu_m^{(n)}]^2$ es la raíz número m de la ecuación

$$\frac{J_{\frac{\pi n}{\varphi_0}}(\mu a)}{J_{\frac{\pi n}{\varphi_0}}(\mu b)} = \frac{N_{\frac{\pi n}{\varphi_0}}(\mu a)}{N_{\frac{\pi n}{\varphi_0}}(\mu b)},$$

$$\|v_{m,n}\|^2 + \|\Phi_n\|^2\,\|R_{m,n}\|^2 = \frac{\varphi_0}{2}\|R_{m,n}\|^2.$$

Véanse las expresiones para $\|R_{m,n}\|^2$ en el problema 27 (la fórmula (4) con la sustitución de J_n por $J_{\frac{\pi n}{\varphi_0}}$.

De modo semejante se obtienen las expresiones para los casos b) y c).

30. a) Se requiere hallar las oscilaciones propias para la región

$$a \leqslant \rho \leqslant b,\quad 0 \leqslant z \leqslant l,\quad \text{si}\quad v = 0\quad \text{para}\quad \rho = a,\quad \rho = b\quad \text{y}\quad z = 0,\quad z = l.$$

Las funciones propias son

$$v_{m,n,k}(\rho,\ \varphi,\ z) = R_{m,n}(\rho)\,\Phi_n(\varphi)\,Z_k(z),$$

donde

$$\Phi_n(\varphi) = \begin{cases}\cos n\varphi\\ \operatorname{sen} n\varphi\end{cases} \quad (n = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots),$$

$$Z_k(z) = \operatorname{sen}\frac{\pi k}{l}z \quad (k = 1,\ 2,\ \ldots),$$

$$R_{m,n}(\rho) = J_n(\mu_m^{(n)}\rho)\,N_n(\mu_m^{(n)}a) - J_n(\mu_m^{(n)}a)\,N_n(\mu_m^{(n)}\rho)$$

(véase la respuesta al problema 27), $\mu_m^{(n)}$ es la raíz de la ecuación

$$\frac{J_n(\mu a)}{J_n(\mu b)} = \frac{N_n(\mu a)}{N_n(\mu b)},$$

$$\lambda_{m,n,k} = (\mu_m^{(n)})^2 + \left(\frac{\pi k}{l}\right)^2,$$

$$\|v_{m,n,k}\|^2 = \frac{\pi l}{2}\varepsilon_n\,\|R_{m,n}\|^2,$$

Véase la expresión para $\| R_{m \cdot n} \|^2$ en la respuesta al problema 27 a).

b) En este caso $= \frac{\partial v}{\partial \rho} 0$ para $\rho = a, b$, $\frac{\partial v}{\partial z} = 0$ para $z=0$, $z=l$, de modo que

$$\Phi_n(\varphi) = \begin{cases} \cos n\varphi, \\ \operatorname{sen} n\varphi \end{cases} \quad (n=0, 1, 2, \ldots),$$

$$Z_k(z) = \cos \frac{\pi k}{l} z \quad (k=0, 1, 2, \ldots).$$

$R_{m \cdot n}(\rho)$ se da en la respuesta al problema 28 b),

$$\lambda_{m,\,n,\,k} = (\mu_m^{(n)})^2 + \left(\frac{\pi k}{l}\right)^2,$$

$$\| v_{m,\,n,\,k} \|^2 = \frac{\pi l}{2} \varepsilon_k \varepsilon_n \| R_{m,\,n} \|^2.$$

31. Si λ_1 es el primer valor propio de la membrana que tiene la forma del anillo ($\varepsilon \leqslant \rho \leqslant a$) con la frontera fija, y λ_1^0, el primer valor propio de la membrana circular $\rho \leqslant a$ con la frontera fija, entonces la corrección

$$\Delta\lambda_1 = \lambda_1 - \lambda_1^0$$

es siempre positiva y para ε pequeños resulta

$$\Delta\lambda_1 = \frac{2}{a^2 J_1^2(\sqrt{\lambda_1^0}a)} \frac{1}{\ln \frac{1}{\sqrt{\lambda_1^0}\varepsilon}} + \ldots = 7{,}41 \frac{1}{a^2 \ln \frac{a}{2{,}4048\varepsilon}} + \ldots,$$

donde los términos de mayor orden de pequeñez con respecto a ε son omitidos.

De esta fórmula se ve que

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \Delta\lambda_1 = 0.$$

Solución. El valor propio menor λ_1^0 de la membrana circular con la frontera fija rigidamente $\rho = a$ se determina de la ecuación

$$J_0(\sqrt{\lambda_1^0}a) = 0.$$

y el primer valor propio λ_1 de la membrana que tiene la forma del anillo $\varepsilon < \rho < a$ con la frontera fija rigidamente se determina de la ecuación

$$J_0(\sqrt{\lambda_1}\varepsilon) N_0(\sqrt{\lambda_1}a) - J_0(\sqrt{\lambda_1}a) N_0(\sqrt{\lambda_1}\varepsilon) = 0. \qquad (1)$$

Haciendo

$$\sqrt{\lambda_1} = \sqrt{\lambda_1^0} + \alpha,$$

de modo que $\Delta\lambda_1 = 2\sqrt{\lambda_1^0}\alpha$ y teniendo en cuenta que

$$J_0(\sqrt{\lambda_1}\varepsilon) = 1 - \ldots, \quad N_0(\sqrt{\lambda_1}\varepsilon) = \frac{2}{\pi} \ln \sqrt{\lambda_1}\varepsilon + \ldots,$$

$$N_0(\sqrt{\lambda_1}a) = N_0(\sqrt{\lambda_1^0}a) - N_1(\sqrt{\lambda_1^0}a)\alpha a,$$

$$J_0(\sqrt{\lambda_1}a) = J_0(\sqrt{\lambda_1^0}a) - J_1(\sqrt{\lambda_1^0}a)\alpha a = -\alpha a J_1(\sqrt{\lambda_1^0}a).$$

De la ecuación (1) obtenemos

$$\alpha = \frac{\pi}{2a} \frac{N_0(\sqrt{\lambda_1^0}a)}{J_1(\sqrt{\lambda_1^0}a)} \frac{1}{\ln \frac{1}{\sqrt{\lambda_1^0}\varepsilon}}.$$

Utilizaremos ahora la expresión para el determinante de Wronski

$$J_0(x)\,N_0'(x)-J_0'(x)\,N_0(x)=\frac{2}{\pi x};$$

dado que $J_0(\sqrt{\lambda_1^0}a)=0$, entonces de aquí hallamos

$$N_0(\sqrt{\lambda_1^0}\,a)=\frac{2}{\pi\sqrt{\lambda_1^0}\,aJ_1(\sqrt{\lambda_1^0}\,a)}$$

y

$$\alpha=\frac{1}{\sqrt{\lambda_1^0}\,a^2J_1^2(\sqrt{\lambda_1^0}\,a)}\,\frac{1}{\ln\dfrac{1}{\sqrt{\lambda_1^0}\,\varepsilon}}.$$

Dado que la primera raíz de la ecuación $J_0(\mu)=0$ es $\mu_1^0=2{,}4048$ y $J_1(\mu_1^0)=$ $=0{,}5191$, entonces

$$\Delta\lambda_1\approx 7{,}41\,\frac{1}{a^2\ln\dfrac{a}{2{,}4048\varepsilon}}.$$

32. Si el peso M es pequeño, entonces

a) $\lim\limits_{M\to 0}\lambda_1=\lambda_1^0$,

b) $\Delta\lambda_1=\lambda_1-\lambda_1^0\sim\dfrac{1}{\ln\dfrac{1}{\varepsilon}}$.

Si el peso M es grande, entonces

a) $\lim\limits_{M\to\infty}\lambda_1=0,\quad \lim\limits_{M\to\infty}\lambda_2=\lambda_1^0$,

b) $\lambda_1=2\pi C\dfrac{1}{M}+\ldots$,

donde C es igual a

$$C=-\frac{1}{\ln p}=\frac{1}{\ln\dfrac{1}{p}},$$

donde

$$p=\frac{\varepsilon}{a},$$

de modo que

$$\lambda_1=\frac{2\pi}{\ln\dfrac{1}{p}}\,\frac{1}{M}+\ldots$$

Solución. La ecuación de las oscilaciones de la membrana es de la forma

$$\frac{1}{\rho}\frac{d}{d\rho}\left(\rho\frac{du}{d\rho}\right)+\lambda\delta u=0\quad\text{para}\quad\varepsilon<\rho<a,$$

donde δ es la densidad de masa.

La frontera $\rho=a$ está fija, de modo que

$$u\,|_{\rho=a}=0.$$

Denotemos $\sqrt{\lambda\delta}a=x,\quad \sqrt{\lambda\delta}\cdot\varepsilon=px,\quad p=\dfrac{\varepsilon}{a}$.

Para obtener la segunda condición de frontera variamos el problema, sustituyendo el círculo de radio ε con centro en el punto O por la placa absolutamente rigida de masa M para la cual la ecuación del movimiento es de la forma

$$M \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = F,$$

donde

$$F = \int_{\rho=\varepsilon}^{2\pi} \frac{\partial u}{\partial \rho} \rho \, d\varphi = 2\pi\varepsilon \frac{du}{d\rho} (\varepsilon),$$

ó

$$-\lambda M u \,|_{\rho=\varepsilon} = 2\pi\varepsilon u' (\varepsilon),$$

dado que $\ddot{u} = -\lambda u$.

La solución general es de la forma

$$u = A J_0 (\sqrt{\lambda\delta}\rho) + B N_0 (\sqrt{\lambda\delta}\rho)$$

ó

$$u = N_0 (x) \, J_0 \left(\frac{x}{a} \rho\right) - J_0 (x) \, N_0 \left(\frac{x}{a} \rho\right).$$

La condición para $\rho = \varepsilon$ nos da la ecuación para determinar λ:

$$S (x) = \frac{\delta\pi a^2}{M},$$

$$S (x) = \frac{x}{2p} \frac{J_0 (px) \, N_0 (x) - J_0 (x) \, N_0 (px)}{J_1 (px) \, N_0 (x) - N_1 (px) \, J_0 (x)} \tag{1}$$

donde

$$x = \sqrt{\lambda\delta} a.$$

La solución de la ecuación de la dispersión (1) se puede hallar graficamente. El gráfico de la función $S (x)$ es de la forma dada en fig. 59.

Aquí k_0, k_1, k_2 son las raíces del denominador de la función $S (x)$ y la curva punteada, la parábola

$$S = -\frac{1}{2} x^2 \ln p.$$

Dando el valor de M (en fig. 59 la horizontal AB), hallamos las raíces correspondientes de la ecuación de dispersión.

Para $M \to \infty$ la horizontal AB tiende al eje x, la primera raíz tiende a cero; las restantes raíces, a los valores λ_1^0, λ_2^0, λ_3^0, . . . que son las raíces del numerador de la función $S (x)$. Las magnitudes λ_1^0, λ_2^0, λ_3^0, . . . difieren de k_0, k_1, k_2, . . . a las magnitudes que tienen el orden de la magnitud de la capacidad del círculo de radio ε

$$C = \frac{1}{\ln \frac{\varepsilon}{a}}.$$

Para las masas M grandes la primera raíz será pequeña.

Desarrollemos las funciones cilíndricas en el entorno del cero:

$$J_0(x)=1-\ldots,\quad J_1(x)=\frac{1}{2}x+\ldots,\quad N_0(x)=$$

$$=\ln(x)+\ldots,\quad N_1(x)=-\frac{1}{x}+\ldots$$

Sustituyendo estas expresiones en la igualdad (1), hallamos

$$\lambda=\frac{2\pi}{M}\cdot\frac{1}{-\ln p}=2\pi C\,\frac{1}{M}+\ldots,$$

donde $C=-\frac{1}{\ln p}$, $p=\frac{\varepsilon}{a}$.

33. Sea que la frontera exterior de la membrana que tiene forma del anillo

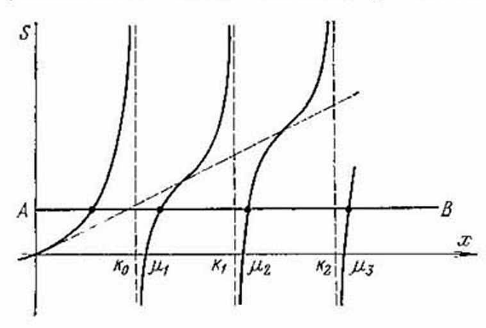


Fig. 59

$\varepsilon\leqslant\rho\leqslant a$ está libre, es decir,

$$\frac{\partial v}{\partial\rho}(a,\ \varphi)=0.$$

Entonces

$$\Delta\lambda_1=\lambda_1-\lambda_1^0=\frac{2}{a^2J_0^2(\sqrt{\lambda_1^0}\,a)\ln\frac{1}{\sqrt{\lambda_1^0}\,\varepsilon}}+\ldots\approx\frac{12,3}{a^2\ln\frac{a}{3,83\varepsilon}},$$

donde $\lambda_1^0=\left(\frac{\mu_1^0}{a}\right)^2$, μ_1^0 es la primera raíz de la ecuación $J_1(\mu)=0$, $\mu_1^0=3,83$.

34. El problema sobre las oscilaciones propias de la membrana circular tendida sobre el hueco de un recipiente de volumen V_0 (tambor) conduce a la siguiente ecuación:

$$\Delta_2v+\lambda v=\frac{\delta_0c_0^2}{v_0T}\int_0^a\int_0^{2\pi}v\rho\,d\rho\,d\varphi\left(\lambda=\frac{\omega^2}{c^2}\right),\tag{1}$$

si suponemos que la velocidad de las ondas transversales es considerablemente menor que la velocidad del sonido en el aire.

Aquí δ_0 es la densidad del aire en el recipiente; c_0, la velocidad del sonido en el aire con presión y temperatura dentro del recipiente correspondientes a la membrana inmóvil; $c = \sqrt{\frac{T}{\rho}}$; T, la tensión de la membrana; a, su radio. La integral a la derecha significa la presión adicional excitada por las oscilaciones del aire en el recipiente (véase [38], pág. 217).

De (1) y de la ortogonalidad de las funciones trigonométricas sobre $(0, 2\pi)$ se deduce que para $n > 0$ las funciones propias de la membrana

$$v_{n,\,m} = J_n\left(\frac{\mu_m^{(n)}}{a}\rho\right)\quad\begin{cases}\cos n\varphi,\\ \operatorname{sen} n\varphi\end{cases}\tag{2}$$

no varían a pesar de la existencia del volumen unido del aire.

Las funciones propias que poseen la simetría cilíndrica ($n = 0$) son de la forma

$$v_m(\rho) = J_0\left(\frac{\mu_m}{a}\rho\right) - J_0(\mu_m)\left(\lambda = \frac{\mu_m^2}{a^2}\right),\tag{3}$$

donde μ_m es la raíz de la ecuación

$$J_0(\mu) = -\frac{\chi}{\mu^2}J_2(\mu)\tag{4}$$

$$\chi = \frac{\pi\delta_0 c_0^2 a^4}{v_0 T},$$

que se obtiene si sutituimos (3) en la ecuación (1).

La serie para $J_2(\mu)$ da

$$\frac{J_2(\mu)}{\mu^2} = \frac{1}{8} - \frac{\mu^2}{96} + \frac{\mu^4}{3072}.\tag{5}$$

Si $\nu_1 = 2,4048$ es la primera raíz de la ecuación $J_0(\nu) = 0$, entonces

$$J_0(\mu_1) = -J_1(\nu_1)\,\varepsilon = -0,5191\varepsilon \quad (\varepsilon = \mu_1 - \nu_1).$$

De (4) y (5) obtenemos:

$$\varepsilon = \frac{\left(\frac{1}{8} - \frac{\nu_1^2}{96} + \frac{\nu_1^4}{3072}\right)\chi}{J_1(\nu_1) + \left(\frac{\nu_1}{48} + \frac{\nu_1^3}{768}\right)\chi} = \frac{1}{6,8619 + 0,4229\chi}\chi.$$

Esta fórmula permite calcular las correcciones al primer valor propio como resultado del volumen asociado.

Así, por ejemplo,

$$\varepsilon = \begin{cases}0,0373 & \text{para}\quad \chi = 1,\\ 0,5570 & \text{para}\quad \chi = 5\end{cases}$$

y, respectivamente,

$$\mu_1 = 2,4421,$$
$$\mu_1 = 2,9618.$$

35. La frecuencia principal es $\omega_1^0 \approx 1520\ \text{s}^{-1}$. Puede ser aumentada en un 45% si agregamos el volumen del aire

$$V_0 \approx 2918\ \text{cm}^3 \quad (\chi = 10).$$

Indicación. Véase el problema 34.

§ 3. Propagación y radiación del sonido

Como es sabido*) las ecuaciones de la acústica poseen la forma

$$\left.\begin{array}{l} v_t = -c^2 \operatorname{grad} s, \\ s_t + \operatorname{div} v = 0, \end{array}\right\} \qquad (1)$$

donde v es el vector de la velocidad de las partículas del gas; $s = \dfrac{\rho - \rho_0}{\rho_0}$, la condensación del gas; $c = \sqrt{\dfrac{\gamma p^0}{\rho_0}}$, la velocidad del sonido; ρ_0 y p_0, la densidad y la presión iniciales; γ, la constante adiabática.

Haciendo

$$v = -\operatorname{grad} U \quad \text{o} \quad s = c^2 U_t,$$

donde U es el potencial de las velocidades, obtenemos para el potencial la ecuación de las oscilaciones

$$U_{tt} = c^2 \Delta U.$$

La presión total p se expresa simplemente mediante la condensación s:

$$p = p_0 (1 + \gamma s).$$

Designando por $P = p - p_0$ la presión excesiva, tenemos

$$P = \frac{\gamma p_0}{\rho_0} \rho_0 s = \rho_0 c^2 s.$$

De aquí se ve que la presión excesiva P satisface también la ecuación de las oscilaciones

$$P_{tt} = c^2 \Delta P.$$

Si la frontera Σ de la región en que se busca la solución se supone absolutamente rígida, entonces sobre ella la componente normal de la velocidad es igual a cero:

$$v_n \big|_{\Sigma} = 0 \quad \text{ó} \quad \frac{\partial U}{\partial n}\bigg|_{\Sigma} = 0, \quad \frac{\partial P}{\partial n}\bigg|_{\Sigma} = 0,$$

donde n es la normal a Σ.

La energía cinética del volumen $dx\,dy\,dz$ del gas es igual a $\frac{1}{2} \rho_0 v^2\, dx\, dy\, dz$.

La energía potencial, obviamente, es dada por la expresión

$$\frac{1}{2} \mid Ps \mid = \frac{1}{2\rho_0 c^2} P^2.$$

$$\frac{1}{2} \mid Ps \mid = \frac{1}{2\rho_0 c^2} P^2.$$

La energía total por unidad de volumen es igual a

$$W = \frac{1}{2} \rho_0 v^2 + \frac{1}{2\rho_0 c^2} P^2.$$

Utilizando la fórmula de Green, no es difícil escribir el principio de conservación de la energía en la forma

$$\frac{\partial}{\partial t} \int\limits_T W\, d\tau = -\int\limits_S Y\, dS, \quad Y = pv,$$

*) Véase, por ejemplo, [7], cap. II

donde T es cierto volumen acotado por la superficie S. El vector $Y = pv$ es el flujo de la energía a través de una unidad de superficie, y se denomina vector de Umov.

La energía total inradiada por cierto manantial durante una unidad de tiempo (potencia total) es igual a

$$\Pi = \int_S Y dS,$$

donde S es cierta superficie cerrada que circunda al manantial.

En el caso de las oscilaciones estables

$$P = pe^{i\omega t}.$$

donde la amplitud p satisface la ecuación de la onda

$$\Delta p + k^2 p = 0.$$

En lo sucesivo en todas partes trataremos los procesos acústicos estables, es decir, las ecuaciones de las ondas, omitiendo, como regla, el multiplicador que depende de tiempo $e^{i\omega t}$. Si $s = \bar{s}e^{i\omega t}$, $v = \bar{v}e^{i\omega t}$, entonces $\bar{s}$ y $\bar{v}$ también satisfacen la ecuación de la onda, además, su amplitud será $p = ikc\,\rho_0 U$.

En el caso de dependencia armónica con respecto al tiempo, comunmente se utilizan las magnitudes medias del período de las funciones examinadas. Si tomamos la dependencia del tiempo en la forma $e^{i\omega t}$, entonces las amplitudes p y v serán complejas (la raya sobre v se omite). Teniendo en cuenta eso, para un flujo de energía medio del período, obtenemos la expresión

$$\overline{Y} = \frac{1}{2} \operatorname{Re} (p\bar{v}^*)$$

que se llama también intensidad o fuerza del sonido.

En la acústica se utiliza ampliamente la noción de impedancia. Como es conocido, la impedancia mecánica del sistema z se define como la razón de la presión y la velocidad. La magnitud $\rho_0 c$ se llama resistencia acústica de la radiación. La impedancia adimensional se define por la relación

$$\zeta = \frac{z}{\rho_0 c} \quad \text{o} \quad \zeta = \frac{p}{\rho_0 vc}.$$

1. Manantial puntiforme

36. Se exige hallar la función

$$G(x, y, z, \xi, \eta, \zeta) = \frac{e^{-ikr}}{4\pi r} + v,$$

$$r = \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2},$$

donde v es la solución regular de una ecuación de onda que debe ser elegida de tal modo que para $z = 0$ se cumpla una de las condiciones: $G\Big|_{z=0} = 0$, $\dfrac{\partial G}{\partial z}\Big|_{z=0} = 0$.

a) $G(x, y, z, \xi, \eta, \zeta) = \dfrac{e^{-ikr}}{4\pi r} - \dfrac{e^{-ikr_1}}{4\pi r_1}$,

$$r_1 = \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z+\zeta)^2}.$$

La solución del primer problema de contorno será

$$u(x, y, z) = -\frac{z}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty}\int \left(ik + \frac{1}{R} \right) \frac{e^{-ikr}}{R^2} f(\xi, \eta) \, d\xi d\eta,$$

$$R = \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + z^2};$$

b) $\hat{G}(x, y, z, \xi, \eta, \zeta) = \frac{e^{-ikr}}{4\pi r} + \frac{e^{-ikr_1}}{4\pi r_1}$.

La solución del segundo problema de contorno será

$$u(x, y, z) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int \hat{G}\Big|_{\zeta=0} f(\xi, \eta) \, d\xi d\eta = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty}\int \frac{e^{-ikR}}{R} f(\xi, \eta) \, d\xi \, d\eta.$$

Indicación. Para construir la función de manantial G utilizar el método de las reflexiones especulares.

37. a) $G(M, P) = -\frac{i}{4} [H_0^{(2)}(kr) - H_0^{(2)}(kr_1)]$,

b) $\hat{G}(M, P) = -\frac{i}{4} [H_0^{(2)}(kr) + H_0^{(2)}(kr_1)]$,

donde

$$M = M(x, y), \qquad P = P(\xi, \eta),$$

$$r = \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2}, \qquad r_1 = \sqrt{(x-\xi)^2 + (y+\eta)^2}.$$

Indicación. Se exige hallar la solución de la ecuación de onda $\Delta_2 v + k^2 v = 0$ que satisfaga para $y = 0$ la condición de frontera $v = 0$ ó $\frac{\partial v}{\partial y} = 0$; en el infinito, la condición de radiación

$$\lim_{r \to \infty} \sqrt{r} \left(\frac{\partial v}{\partial r} + ikv \right) = 0 \qquad (1)$$

ó

$$\lim_{r \to \infty} \sqrt{r} \left(\frac{\partial v}{\partial r} - ikv \right) = 0 \qquad (2)$$

y que tiene para $r \to 0$ una singularidad logarítmica, es decir, que puede representarse en la forma

$$G = -\frac{i}{4} H_0^{(2)}(kr) + v.$$

Utilizamos la condición de radiación en la forma (1) en relación con la elección del multiplicador que depende del tiempo en la forma $e^{i\omega t}$.

38. El potencial de las velocidades del manantial puntiforme es igual a

$$U = Q_0 \frac{e^{-ikr}}{4\pi r},$$

donde Q_0 es el rendimiento del manantial puntiforme.

La velocidad $v = -\text{grad}\ U$ tiene la componente radial

$$v_r = \left(ik + \frac{1}{r} \right) U.$$

La presión es

$$p = ikc\,\rho_0 U.$$

La potencia completa irradiada por unidad de tiempo (el valor medio según el tiempo) es

$$\prod = \frac{Q_0^2 k^2 c\rho_0}{8\pi}.$$

La impedancia acústica adimensional es

$$\zeta = \frac{ikc\rho_0}{\left(ik + \frac{1}{r} \right) c\rho_0} = \frac{1}{1 + \frac{1}{ikr}}$$

Si r es suficientemente grande, entonces

$$\zeta = 1 + \frac{i}{kr} + \cdots$$

Indicación. Para calcular la velocidad v y la presión excesiva p utilizar las fórmulas

$$v_r = -\frac{\partial U}{\partial r}, \qquad p = ikc\rho_0 U.$$

El flujo de energía se calcula como el valor medio por el tiempo del producto de la presión y la velocidad

$$\overline{Y} = \frac{1}{2}\,\text{Re}\,(pv^*) = \frac{Q_0^2 c\rho_0 k^2}{32\pi^2 r^2}.$$

La potencia completa de radiación es

$$\Pi = \overline{Y} \cdot 4\pi r^2 = \frac{Q_0^2 k^2 c\rho_0}{8\pi}.$$

39. Sean $P_0\,(0,\ 0,\ -a)$ las coordenadas rectangulares del manantial puntiforme del sonido, $P_1\,(0,\ 0,\ a)$, de su imagen especular en el plano $z = 0$.

El potencial de las velocidades es igual a

$$U = \left(\frac{e^{-ikr}}{4\pi r} + \frac{e^{-ikr_1}}{4\pi r_1} \right) Q_0,$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + (z-a)^2}, \qquad r_1 = \sqrt{x^2 + y^2 + (z+a)^2}$$

además

$$r_1 = \sqrt{r^2 + 4a^2 + 4ar\cos\theta}$$

donde θ es el ángulo entre P_0M y P_0P_1; $M\,(x,\ y,\ z)$, el punto de observación.

A grandes distancias del manantial (en la zona de la onda) tenemos

$$r_1 = r + 2a\cos\theta,$$

de modo que

$$U = \frac{Q_0 e^{-ikr}}{4\pi r}\left(1 + e^{-2iak\cos\theta}\right).$$

La intensidad de irradiación es

$$\overline{Y} = 2Y_{38}\left[\cos(2ak\cos\theta) + 1\right]$$

La potencia total de irradiación es

$$\Pi = 2\pi r^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \overline{Y}\operatorname{sen}\theta\, d\theta = \frac{Q_0^2 k^2 c\rho_0}{8\pi}\left(1 + \frac{\operatorname{sen} 2ak}{2ak}\right) = \Pi_{38}\left(1 + \frac{\operatorname{sen} 2ak}{2ak}\right),$$

donde $\overline{Y}_{38}$ y Π_{38} son la intensidad y la potencia total de radiación del manantial puntiforme examinado en el problema 38.

40. En este caso para $z = 0$ tendrá lugar la condición de frontera de la igualdad a cero del potencial de las velocidades $U = 0$, de modo que

$$U = \left(\frac{e^{-ikr}}{4\pi r} - \frac{e^{-ikr_1}}{4\pi r_1}\right) Q_0,$$

$$\Pi = \frac{Q_0^2 k^2 c\rho_0}{8\pi}\left(1 - \frac{\operatorname{sen} 2ak}{2ak}\right) = \Pi_{38}\left(1 - \frac{\operatorname{sen} 2ak}{2ak}\right).$$

41. *Indicación*. Se exige demostrar que

$$v_M(P) = v_p(M),$$

donde $v_M(P)$ es el valor, en el punto P, de la solución de la ecuación de la onda con manantial en el punto M; $v_p(M)$, la solución en el punto M cuando el manantial está en el punto P.

Para la demostración, utilizar la fórmula de Green.

42. Se exige hallar las soluciones particulares de la ecuación

$$\Delta_2 u + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + k^2 u = 0$$

con la condición

$$\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{\Sigma} = 0 \quad (u \text{ es el potencial de la velocidad})$$

y la condición de no existencia de las ondas que llegan del infinito (condición de radiación).

Existen soluciones particulares en forma de ondas móviles

$$u_n(M, z) = A_n \psi_n(M)\, e^{i\gamma_n z} \quad (M = M(x, y)),$$

donde

$$\gamma_n = \sqrt{k^2 - \lambda_n},$$

λ_n y $\psi_n(M)$ son los valores y las funciones propias de la membrana que tiene forma de sección perpendicular S al tubo.

$$\Delta_2\psi_n+\lambda_n\psi_n=0 \quad \text{dentro de } S, \quad \left.\frac{\partial\psi_n}{\partial\nu}\right|_C=0 \quad (C \text{ es la frontera de } S)$$

Si $\lambda_{n_0}<k^2$ y $\lambda_{n_0+1}>k^2$, entonces existen n_0 ondas móviles. Para $n>n_0$ tenemos:

$$u=A_n\psi_n(M)\,e^{-p_n|z|}, \quad p_n=\sqrt{\lambda_n-k^2},$$

las ondas amortiguadas. Observemos que en todas partes se supone que las funciones propias son normadas a 1. La máxima longitud admisible de la onda que puede propagarse dentro del tubo es

$$\Lambda_{\text{máx}}=\frac{2\pi}{\sqrt{\lambda_1}},$$

para el tubo circular de radio a $\Lambda_{\text{máx}}\approx 2{,}613a$.

La velocidad de fase es

$$v_F=\frac{c}{\sqrt{1-\frac{\lambda_n}{k^2}}}>c.$$

La presión excesiva es

$$P=-ikc\,\rho_0 u.$$

La velocidad de las partículas a lo largo del eje z es igual a

$$v_z=-i\gamma_n u.$$

El flujo de energía a través de la sección transversal del tubo es

$$\overline{Y}_n=\frac{1}{2}\left|A_n\right|^2\iint_S \psi_n^2\,dS\cdot kc\rho_0\gamma_n=\frac{1}{2}\,kc\rho_0\gamma_n\left|A_n\right|^2.$$

Para el tubo con la sección circular de radio a tenemos:

$$\lambda_n=\lambda_{m,n}=\left(\frac{\mu_m^{(n)}}{a}\right)^2,$$

$$\hat{\psi}_{m,n}=\sqrt{\frac{\varepsilon_n}{\pi a^2}}\,\frac{\hat{\mu}_m^{(n)}}{\sqrt{(\hat{\mu}_m^{(n)})^2-n^2}}\,\frac{J_n\left(\frac{\hat{\mu}_m^{(n)}r}{a}\right)}{J_n(\hat{\mu}_m^{(n)})}\,{\cos \atop \text{sen}}\,n\varphi, \quad \varepsilon_n=\begin{cases}1, & n=0,\\ 2, & n\neq 0.\end{cases}$$

El flujo de energía es

$$\overline{Y}_{m,n}=\frac{1}{2}\left|A_n\right|^2 kc\rho_0\sqrt{k^2-\left(\frac{\hat{\mu}_m^{(n)}}{a}\right)^2},$$

donde $\hat{\mu}_m^{(n)}$ es la raíz de la ecuación $J_n'(\mu)=0$.

Para el tubo con sección rectangular $0 \leqslant x \leqslant a$, $0 \leqslant y \leqslant b$ tenemos:

$$\lambda_{m,\,n} = \pi^2 \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right),$$

$$\psi_{m,\,n} = \sqrt{\frac{\varepsilon_m \varepsilon_n}{ab}} \cos \frac{\pi m}{a} x \cos \frac{\pi n}{y} y \qquad (n,\ m = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots).$$

El flujo de energía es

$$\overline{Y}_{m,\,n} = \frac{1}{2} \left| A_{m,\,n} \right|^2 kc\rho_0 \sqrt{k^2 - \pi^2 \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)}.$$

43. a) $$G(M,\ P,\ z,\ \zeta) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\psi_n(M)\,\psi_n(P)}{2\varkappa_n} e^{-\varkappa_n |z-\xi|},$$

donde $\varkappa_n = \sqrt{\lambda_n - k^2}$; λ_n y ψ_n son los valores y las funciones propias del primer problema de contorno: $\Delta_2\psi_n + \lambda_n\psi_n = 0$ sobre la sección transversal S; $\psi_n = 0$ sobre la frontera C de la sección S:

b) $$\hat{G}(M,\ P,\ z,\ \zeta) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\hat{\psi}_n(M)\,\hat{\psi}_n(P)}{2\hat{\varkappa}_n} e^{-\hat{\varkappa}_n |z-\zeta|},$$

donde $\hat{\varkappa}_n = \sqrt{\hat{\lambda}_n - k^2}$; $\hat{\lambda}_n$ y $\hat{\psi}_n$ son los valores y funciones propias del segundo problema de contorno

$$\Delta_2\hat{\psi}_n + \hat{\lambda}_n\hat{\psi}_n = 0 \quad \text{sobre} \quad S, \qquad \left.\frac{\partial\hat{\psi}_n}{\partial\nu}\right|_C = 0$$

Si S es un círculo de radio a, entonces

$$\psi_n(M) = \psi_{m,\,n}(r,\ \varphi) = \sqrt{\frac{\varepsilon_n}{\pi a^2}} \frac{J_n\left(\frac{\mu_m^{(n)}}{a} r\right)}{J_n'(\mu_m^{(n)})} \begin{matrix}\cos\\ \text{sen}\end{matrix}\, n\varphi,$$

$$\hat{\psi}_n(M) = \hat{\psi}_{m,\,n}(r,\ \varphi) = \sqrt{\frac{\varepsilon_n}{\pi a^2}} \frac{\hat{\mu}_m^n}{\sqrt{(\hat{\mu}_m^n)^2 - n^2}} \frac{J_n\left(\frac{\hat{\mu}_m^{(n)}}{a} r\right)}{J_n(\hat{\mu}_m^{(n)})} \begin{matrix}\cos\\ \text{sen}\end{matrix}\, n\varphi,$$

donde

$$\varepsilon_n = \begin{cases} 1 & \text{para} \quad n = 0 \\ 2 & \text{para} \quad n \neq 0, \end{cases}$$

$\mu_m^{(n)}$ es la raiz de la ecuación $J_n(\mu) = 0$ y $\hat{\mu}_m^{(n)}$, la raiz de la ecuación $J_n'(\mu) = 0$.

Indicación. Se debe aplicar el método de separación de variables a la ecuación heterogénea

$$\Delta_2 v + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} + k^2 v = -f(M,\ z),$$

donde f es una función arbitraria, y representar la solución en la forma

$$v=\int_{-\infty}^{+\infty}\iint_S G(M,\ P,\ z,\ \zeta)\, f(P,\ \zeta)\, d\sigma_P d\zeta.$$

Si se busca $v(M,\ z)$ en la forma

$$v(M,\ z)=\sum_{n=1}^{\infty} v_n(z)\,\psi_n(M),$$

entonces para $v_n(z)$ obtenemos la ecuación

$$v_n''-\varkappa_n^2 v_n(z)=-f_n(z),\qquad f_n=\iint_S f(P,\ z)\,\psi_n(P)\,d\sigma_P$$

resolviendo la cual, hallamos

$$v_n=\frac{1}{2\varkappa_n}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\varkappa_n|z-\zeta|} f_n(\zeta)\,d\zeta$$

o

$$v_n(z)=\int_{-\infty}^{\infty}\iint_S \frac{e^{-\varkappa_n|z-\zeta|}}{2\varkappa_n}\,\psi_n(P)\, f(P,\ \zeta)\, d\sigma_P d\zeta.$$

44. La función de manantial para el tubo semiacotado $z>0$ con sección arbitraria S

a) $$G(M,\ P,\ z,\ \zeta)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\psi_n(M)\,\psi_n(P)}{2\varkappa_n}\,e^{-\varkappa_n\zeta}\,\mathrm{sh}\,\varkappa_n z,$$

b) $$\hat{G}(M,\ M',\ z,\ \zeta)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\hat{\psi}_n(M)\,\hat{\psi}_n(M')}{2\hat{\varkappa}_n}\,e^{-\hat{\varkappa}_n\zeta}\,\mathrm{ch}\,\hat{\varkappa}_n z.$$

Aquí ψ_n y $\hat{\psi}_n$ son las funciones propias del primer y segundo problemas de contorno para la membrana S

$$\varkappa_n=\sqrt{\lambda_n-k^2},\qquad \hat{\varkappa}_n=\sqrt{\hat{\lambda}_n-k^2}.$$

Indicación. Aplicar el método de reflexiones a la función

$$Z_n(z)=e^{-\varkappa_n|z-\zeta|},$$

de modo que

a) $$Z_n(z)=e^{-\varkappa_n(\zeta-z)}-e^{-\varkappa_n(\zeta+z)}=2e^{-\varkappa_n\zeta}\,\mathrm{sh}\,\varkappa_n z,$$

b) $$\hat{Z}_n(z)=e^{-\hat{\varkappa}_n(\zeta-z)}+e^{-\hat{\varkappa}_n(\zeta+z)}=2e^{-\hat{\varkappa}_n\zeta}\,\mathrm{ch}\,\hat{\varkappa}_n z.$$

45. La función del manantial puntiforme que da la distribución espacial del potencial de las velocidades es igual a

$$G(M, M', z, \zeta) = \sum_{n=1}^{\infty} \psi_n(M)\, \psi_n(M')\, K_n(z, \zeta),$$

donde
$$K_n(z, \zeta) = \begin{cases} \dfrac{\operatorname{ch} p_n z \operatorname{ch} p_n (l-\zeta)}{p_n \operatorname{sh} p_n l} & \text{para} \quad z < \zeta, \\ \dfrac{\operatorname{ch} p_n (l-z) \operatorname{ch} p_n \zeta}{p_n \operatorname{sh} p_n l} & \text{para} \quad z > \zeta, \end{cases}$$

donde $p_n = \sqrt{\lambda_n - k^2}$, $\psi_n(M)$ y λ_n son la función y el valor propios del problema de contorno

$$\Delta_2 \psi_n + \lambda_n \psi_n = 0 \quad \text{dentro de} \quad S, \quad \frac{\partial \psi_n}{\partial \nu} = 0 \quad \text{sobre } C,$$

S es la sección transversal del resonador; C, la frontera de S.

Indicación. Examinando la ecuación (véase el problema 42) para el potencial de las velocidades

$$\Delta_2 U + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} + k^2 U = -f(M, z)$$

con las condiciones de frontera
$U_z|_\Sigma = 0$, $U_z|_{z=0,\ z=l} = 0$ (Σ es la superficie lateral del resonador) y haciendo

$$U(M, z) = \sum_{n=1}^{\infty} v_n(z)\, \psi_n(M),$$

obtenemos para $v_n(z)$ la ecuación

$$v_n'' - p_n^2 v_n = -f_n(z), \qquad v_n'(0) = v_n'(l) = 0.$$

Su solución es de la forma

$$v_n = \int_0^l K_n(z, \zeta)\, f_n(\zeta)\, d\zeta,$$

donde $K_n(z, \zeta)$ es la función correspondiente de Green para la ecuación

$$v_n'' - p_n^2 v_n = 0.$$

En adelante véase el problema 43.

2. Radiación de las membranas, cilindros y esferas

46. La velocidad es

$$v = v_0 e^{-ikz}, \qquad z > 0.$$

La presión,

$$p = c\rho_0 v_0 e^{-ikz} \qquad z > 0.$$

El flujo de energía (el valor medio según el tiempo) es

$$Y = 0{,}5c\rho_0 v_0^2.$$

La impedancia acústica específica,

$$\zeta = 1.$$

47. Si sobre la frontera $z = 0$ la velocidad resulta

$$v_z \mid_{z=0} = v_0(r) \mid = \sum_{m=1}^{\infty} A_m J_0\left(\frac{\mu_m}{a} r\right),$$

donde μ_m es la raíz de la ecuación $J_0(\mu) = 0$, entonces

$$v_z(r, z) = \sum_{m=1}^{\infty} A_m J_0\left(\frac{\mu_m}{a} r\right) e^{-i\gamma_m z} = \sum_{m=1}^{\infty} A_m J_0\left(\frac{\mu_m}{a} r\right) e^{-\varkappa_m z} \qquad (z > 0),$$

$$\gamma_m = \sqrt{k^2 - \frac{\mu_m^2}{a^2}}, \quad \varkappa_m = \sqrt{\frac{\mu_m^2}{a^2} - k^2},$$

a es el radio del tubo.

La presión es

$$p = \sum_{m=0}^{\infty} B_m J_0\left(\frac{\mu_m}{a} r\right) e^{-i\gamma_m z} \qquad (z > 0),$$

donde

$$B_m = \frac{\omega\rho_0}{\gamma_m} A_m.$$

Si

$$v(r, 0) = AJ_0\left(\frac{\mu_1}{a} r\right),$$

entonces

$$B_m = \begin{cases} 0 & \text{para} \quad m > 1, \\ \dfrac{\omega\rho_0 A}{\sqrt{k_2 - \dfrac{\mu_1^2}{a^2}}} & \text{para} \quad m = 1 \end{cases}$$

La velocidad media del pistón es

$$V = \frac{2J_1(\mu_1)}{\mu_1} A \approx 0{,}428\ A.$$

La impedancia,

$$\zeta = \frac{p}{\rho_0 cv} = \frac{k}{\sqrt{k^2 = \dfrac{\mu_1^2}{a^2}}}.$$

El flujo de energía a través de la sección transversal resulta

$$\Pi=\frac{\pi\omega\rho_0 a^2 A^2 J_1^2(\mu_1)}{2\sqrt{k^2-\frac{\mu_1^2}{a^2}}}.$$

48. La velocidad radial es

$$v_r=v_0\,\frac{H_1^{(2)}(kr)}{H_1^{(2)}(ka)}.$$

La presión,

$$p=ic\rho_0 v_0\,\frac{H_0^{(2)}(kr)}{H_1^{(2)}(ka)}.$$

La impedancia es

$$\zeta=\frac{p}{\rho_0 c v_r}=i\,\frac{H_0^{(2)}(kr)}{H_1^{(2)}(kr)}=1+\ldots$$

A las distancias grandes, para $kr\gg 1$, tenemos:

$$v_r=\frac{v_0}{H_1^{(2)}(ka)}\sqrt{\frac{2}{\pi kr}}\,e^{-i\left(kr-\frac{3\pi}{4}\right)}=\frac{iv_0}{H_1^{(2)}(ka)}\sqrt{\frac{2}{\pi kr}}\,e^{-i\left(kr-\frac{\pi}{4}\right)}+\ldots,$$

$$p=\frac{ic\rho_0 v_0}{H_1^{(2)}(ka)}\sqrt{\frac{2}{\pi kr}}\,e^{-i\left(kr-\frac{\pi}{4}\right)}+\ldots$$

El flujo de energía es

$$\overline{Y}=0{,}5\,pv_r^*=\frac{c\rho_0 v_0^2}{\pi kr\,|H_1^{(2)}(ka)|^2}.$$

Indicación. Se exige resolver la ecuación

$$\Delta_2 v+k^2 v=0$$

sobre la región $r\geqslant a$ con las condiciones adicionales

$$v\,|_{r=a}=v_0$$

y

$$\lim_{r\to\infty}\sqrt{r}\left(\frac{\partial v}{\partial r}+ikv\right)=0 \quad \text{(condición de irradiación).}$$

49. La presión excesiva es igual a

$$p\approx\pi^2\nu a\rho_0 v_0 H_0^{(2)}(kr) \qquad \left(\nu=\frac{\omega}{2\pi}\right).$$

En la zona de la onda

$$p=\sqrt{c\nu}\,\pi a\rho_0 v_0\,\frac{e^{-i\left(kr-\frac{\pi}{4}\right)}}{\sqrt{r}}+\ldots,$$

$$v_r=\pi a v_0\sqrt{\frac{\nu}{c}}\,\frac{e^{-i\left(kr-\frac{\pi}{4}\right)}}{\sqrt{r}}+\ldots,$$

$$\zeta=1.$$

La energía total irradiada por unidad de longitud del cilindro es igual aproximadamente a

$$\Pi = \pi^3 \rho_0 \nu a^2 v_0^2.$$

Indicación. Utilizar el desarrollo

$$H_1^{(2)}(x) = \frac{2i}{\pi x} + \ldots \qquad \text{para } x \text{ pequeños},$$

$$H_0^{(2)}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\, e^{-i\left(x - \frac{\pi}{4}\right)} \qquad \text{para } x \text{ grandes}.$$

50. La presión es

$$p = A \cos \varphi H_1^{(2)}(kr).$$

La velocidad radial es

$$v_r = \frac{iA}{c\rho_0} \cos \varphi H_1^{(2)\prime}(kr), \qquad A = \frac{-ic\rho_0 v_0}{H_1^{(2)\prime}(ka)}.$$

La impedancia acústica específica es

$$\zeta \,|_{r=a} = -i\, \frac{H_1^{(2)}(ka)}{H_1^{(2)\prime}(ka)}.$$

Si $ka \ll 1$, entonces

$$A = \frac{2\pi^3 \nu^2 a^2 \rho_0 v_0}{c}, \qquad \zeta = \frac{\pi (ak)^2 k}{2} - ik = \zeta_0 - i\zeta_1.$$

además $\zeta_0 \ll \zeta_1$.

La potencia total irradiada por unidad de longitud es

$$\Pi = \int_0^{2\pi} \overline{Y} r \, d\varphi = \frac{\pi^2}{4c}\, \rho_0 \omega^3 a^4 v_0^2.$$

La reacción del aire sobre una unidad de longitud del cilindro en la dirección de su movimiento es

$$F = \int_0^{2\pi} ap(a, \varphi) \cos \varphi \, d\varphi = ika^2 \pi c \rho_0 v_0 \;^{*)}.$$

Indicación. Tener en cuenta que la condición de frontera es de la forma

$$v_r \,|_{r=a} = v_0 \cos \varphi.$$

51. Si

$$f(\varphi) = \frac{a_0}{2} \sum_{m=1}^{\infty} (a_m \cos m\varphi + b_m \operatorname{sen} m\varphi),$$

---

*) Aquí, como en otras partes, para la presión y la velocidad se ha omitido el multiplicador $e^{i\omega t}$.

donde

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(\varphi)\,d\varphi, \quad a_m=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2} f(\varphi)\cos m\varphi\,d\varphi \quad (m=1,\ 2,\ \ldots),$$

$$b_m=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\varphi)\operatorname{sen} m\varphi\,d\varphi,$$

entonces

$$p=\sum_{m=0}^{\infty}(A_m\cos m\varphi+B_m\operatorname{sen} m\varphi)\,H_m^{(2)}(kr),$$

donde

$$A_m=-\frac{ic\rho_0}{H_m^{(2)\prime}(ka)}a_m, \quad B_m=\frac{-ic\rho_0}{H_m^{(2)\prime}(ka)}b_m \quad (m=1,\ 2,\ \ldots),$$

$$A_0=-\frac{ic\rho_0}{H_0^{(2)\prime}(ka)}\cdot\frac{a_0}{2},$$

$$v_r=\frac{a_0}{2}\frac{H_0^{(2)\prime}(kr)}{H_0^{(2)\prime}(ka)}+\sum_{m=1}^{\infty}(a_m\cos m\varphi+b_m\operatorname{sen} m\varphi)\frac{H_m^{(2)\prime}(kr)}{H_m^{(2)\prime}(ka)}.$$

Para

$$f(\varphi)=v_0=\frac{a_0}{2}, \quad a_m=b_m=0, \quad m>0,$$

obtenemos

$$p=\frac{ic\rho_0}{H_1^{(2)}(ka)}v_0H_0^{(2)}(kr),$$

$$v=v_0=\frac{H_1^{(2)}(kr)}{H_1^{(2)}(ka)},$$

es decir, la solución del problema 48. Análogamente se obtienen las soluciones de los problemas 49 y 50.

52. La presión es

$$p=A\zeta_1^{(2)}(kr)\,P_1(\cos\theta).$$

La velocidad radial,

$$v_r=\frac{iA}{3c\rho_0}\left[\zeta_0^{(2)}(kr)-2\zeta_2^{(2)}(kr)\right]P_1(\cos\theta),$$

donde

$$\zeta_n^2(x)=\sqrt{\frac{\pi}{2x}}\,H^{(2)}_{n+\frac{1}{2}}(x).$$

$P_1(x) = x$ es el polinomio de Legendre de primer grado. Si $ka \ll 1$, entonces

$$A = 0{,}5c\rho_0 (ak)^3 v_0.$$

La fuerza completa que actúa sobre la esfera en la dirección de susoscilaciones resulta

$$F = -i\omega \cdot \frac{2}{3} \pi\rho a^3 v_0.$$

La resonancia específica adimensional para $r = a$ es

$$\zeta = -\frac{i3\zeta_1^{(2)}(ka)}{\zeta_0^{(2)}(ka) - 2\zeta_2^{(2)}(ka)} = -\frac{i}{2} ka + \ldots$$

En la zona de la onda

$$p = \frac{A}{kr} e^{-i(kr-\pi)} \cos\theta,$$

$$v_r = \frac{A}{c\rho_0 kr} e^{-i(kr-\pi)} \cos\theta,$$

$$A = \frac{3c\rho v_0 i}{2\zeta_2^{(2)}(ka) - \zeta_0^{(2)}(ka)}.$$

El flujo de energía irradiada por el dipolo en la unidad de tiempo es

$$\overline{Y} = 0{,}5 \frac{A^2 \cos^2\theta}{c\rho_0 (kr)^2} = \frac{1}{8} \frac{c\rho_0 (ak)^6 v_0^2}{(kr)^2} \cos^2\theta.$$

La potencia total irradiada por el dipolo acústico es igual a

$$\Pi = \frac{\pi}{6} c\rho_0 v_0^2 a^2 (ak)^4,$$

es decir,

$$\Pi \sim k^4 \quad \text{o} \quad \Pi \sim \frac{1}{\lambda^4}.$$

53. Si es posible el desarrollo

$$f(\theta) = \sum_{m=0}^{\infty} A_m P_m(\cos\theta),$$

entonces la velocidad resulta

$$v = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{A_m \zeta_m^{(2)\prime}(kr)}{\zeta_m^{(2)\prime}(ka)} P_m(\cos\theta),$$

la presión excesiva es

$$p = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{B_m \zeta_m^{(2)}(kr)}{\zeta_m^{(2)\prime}(ka)} P_m(\cos\theta),$$

donde

$$B_m = -ic\rho_0 A \quad .$$

Si $ka \ll 1$, entonces la reacción completa del medio sobre la esfera se puede calcular según la fórmula

$$F=2\pi a^2 \int_0^\pi (p)_{r=a} \cos\theta \,\text{sen}\,\theta \, d\theta = \frac{4\pi a^2}{3} B_1 \frac{\zeta_1^{(2)}(ka)}{\zeta_1^{(2)\prime}(ka)} = $$

$$= \frac{ic\rho_0}{2}\left(\frac{4\pi a^2}{3}\right) A_1 k + \cdots$$

Si $f(\theta)=v_0$, entonces

$$A_m = \begin{cases} v_0 & \text{para} \quad m=0, \\ 0 & \text{para} \quad m \neq 0 \end{cases}$$

y

$$F=0.$$

Indicación. Al calcular la fuerza total que actúa sobre la esfera se deben utilizar las fórmulas

$$\zeta_1^{(2)}(\rho) \frac{i}{\rho^2} + \ldots; \ \zeta_1^{(2)\prime}(\rho) \approx -\frac{2i}{\rho^3} + \ldots \ \text{para } \rho \text{ pequeños.}$$

54. Si la velocidad de la superficie de la esfera es igual a cero en todas partes excepto en un área circular pequeña de radio ε en un entorno del punto $\theta = 0$ (el polo)

$$v(\theta) = \begin{cases} v_0 & \text{para} \quad 0 \leqslant \theta \leqslant \dfrac{\varepsilon}{a}, \\ 0 & \text{para} \quad \dfrac{\varepsilon}{a} < \theta < \pi \end{cases}$$

donde a es el radio de la esfera, entonces

$$p = -ic\rho_0 \sum_{m=0}^{\infty} A_m \frac{\zeta_m^{(2)}(kr)}{\zeta_m^{(2)\prime}(ka)} P_m(\cos\theta),$$

$$v_r = \sum_{m=0}^{\infty} A_m \frac{\zeta_m^{(2)\prime}(kr)}{\zeta_m^{(2)\prime}(ka)} P_m(\cos\theta),$$

$$A_m = \frac{2m+1}{2} v_0 \int_0^{\varepsilon/a} P_m(\cos\theta)\,\text{sen}\,\theta\, d\theta \approx \frac{2m+1}{4}\left(\frac{\varepsilon}{a}\right)^2 v_0.$$

La energía total de irradiación es igual a

$$\Pi = pcv_0^2 \frac{\varepsilon^4}{32a^2} \frac{4\pi}{(ka)^2} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{2m+1}{D_m^2}.$$

Para las frecuencias muy bajas

$$p \approx \omega \frac{\rho_0}{4\pi r} (\pi\varepsilon^2 v_0)\, e^{ikr} = i\omega \frac{\rho_0}{4\pi r} e^{ikr} Q_0,$$

donde $Q_0 = \pi\varepsilon^2 v_0$ es la potencia del manantial puntiforme.

Indicación. La expresión para D_m se obtiene de la fórmula (1) del problema 62.

55. La componente radial de la velocidad es igual a

$$v_r(r, \vartheta) = \frac{\zeta_2^{(2)\prime}(kr)}{\zeta_2^{(2)\prime}(ka)} P_2(\cos\theta).$$

La presión es

$$p = -ic\rho_0 v_0 \frac{\zeta_2^{(2)}(kr)}{\zeta_2^{(2)\prime}(ka)} P_2(\cos\theta).$$

Para $ka \ll 1$ la intensidad y la potencia de radiación del cuadripolo serán iguales a

$$\overline{Y} = \frac{c\rho_0 k^6 a^8}{162 r^2} v_0^2 P_2^2(\cos\theta),$$

$$\Pi = \frac{2\pi}{405} c\rho_0 k^6 a^8 v_0^2.$$

Indicación. Tener en cuenta que $v|_{r=a}$ puede ser escrita de la forma $v|_{r=a} = v_0 P_2(\cos\theta)$ y buscar la presión en la forma

$$p = R(r) P_2(\cos\theta).$$

Para calcular el flujo de energía y la potencia de radiación utilizar las fórmulas

$$\zeta_2^{(2)}(x) = i\frac{3}{x^3} \quad \text{para } x \text{ pequeñas},$$

$$\zeta_2^{(2)\prime}(x) = -i\frac{9}{x^4} \quad \text{para } x \text{ pequeñas},$$

y también las fórmulas asintóticas para x grandes.

Es interesante comparar las fórmulas

$$\Pi = \frac{\pi}{6} c\rho_0 v_0^2 a^6 k^4 \sim \omega^4 \quad \text{para el dipolo acústico},$$

$$\Pi = \frac{2\pi}{405} c\rho_0 v_0^2 a^8 k^6 \sim \omega^6 \quad \text{para el cuadripolo acústico.}$$

56. Si la amplitud de la velocidad de la placa (del pistón) es v_0, entonces

$$p = \frac{ikc\rho_0 v_0}{2\pi} \int_0^a y\,dy \int_0^{2\pi} \frac{e^{-ikR}}{R} d\psi,$$

donde R es la distancia del punto $M_0(y, \psi)$ al punto de observación M (fig. 60).

Si $\frac{a}{R} \ll 1$, entonces

$$p \approx \frac{ikc\rho_0 a^2}{2r} v_0 e^{-ikr}\left[\frac{2J_1(ka \operatorname{sen}\theta)}{ka \operatorname{sen}\theta}\right],$$

$$v_r \approx ika^2 \frac{e^{-ikr}}{2r} v_0 \left[\frac{2J_1(ka \operatorname{sen}\theta)}{ka \operatorname{sen}\theta}\right].$$

El flujo de energía irradiada por el pistón es

$$\overline{Y}=\frac{a^2c\rho_0v_0^2}{8r^2}\mu^2\left[\frac{2J_1(\mu\operatorname{sen}\theta)}{\mu\operatorname{sen}\theta}\right]^2,$$

$$\mu=ak.$$

Si $\mu\ll 1$, entonces

$$\overline{Y}=\frac{a^2c\rho_0v_0^2}{8r^2}\mu^2\left(1-\frac{\mu^2\operatorname{sen}^2\theta}{4}\right).$$

En este caso la potencia total es igual a $\Pi=\frac{\pi a^2c\rho_0v_0^2}{4}\times\mu^2\left(1-\frac{\mu^2}{6}\right)$.

Indicación. El potencial de las velocidades generadas por el movimiento

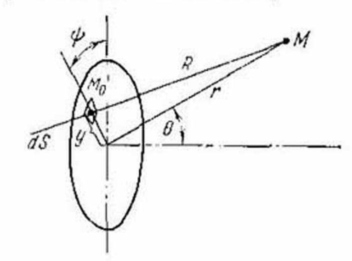


Fig. 60

del pistón se representa en forma de potencial de la capa simple

$$U=\frac{v_0}{2\pi}\int_0^a\int_0^{2\pi}\frac{e^{-ikR}}{R}\,y\,dy\,d\psi.$$

La presión es

$$p=ikc\rho_0U.$$

Si $R\gg a$, entonces la función subintegral tomará la forma

$$\frac{e^{-ikR}}{R}=\frac{e^{-ikr}\,e^{iky\operatorname{sen}\theta\cos\psi}}{r-y\operatorname{sen}\theta\cos\psi}\qquad(R=r-y\operatorname{sen}\theta\cos\psi)$$

de modo que

$$U=v_0\frac{e^{-ikr}}{2\pi r}\int_0^a y\,dy\int_0^{2\pi}e^{i(ky\operatorname{sen}\theta)\cos\psi}\,d\psi=$$

$$=v_0\frac{e^{-ikr}}{2\pi r}\int_0^a y\,dy\,J_0(ky\operatorname{sen}\theta)\,2\pi=v_0\frac{e^{-ikr}}{2r}\left[\frac{2J_1(ka\operatorname{sen}\theta)}{ka\operatorname{sen}\theta}\right].$$

De aquí también se obtienen las fórmulas para p y v_r.

57. La presión sobre la superficie de la placa es

$$p\big|_{r=a}=\frac{c\rho_0}{2}v_0\{1-J_0(2\mu)+iM_0(2\mu)\},\quad \mu=ak, \tag{1}$$

donde

$$M_0(x)=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2}\operatorname{sen}(x\operatorname{sen}\varphi)\,d\varphi=\frac{2}{\pi}\left(x-\frac{x^3}{1^2\cdot 3^2}+\right.$$

$$\left.+\frac{x^5}{1^2\cdot 3^2\cdot 5^2}-\frac{x^7}{1^2\cdot 3^2\cdot 5^2\cdot 7^2}+\ldots\right).$$

La fuerza de la reacción del campo acústico sobre la placa es

$$F=2\pi\int_0^a p\big|_{r=a'}a'\,da'=\frac{a^2\pi c\rho_0 v_0}{2}\left[1-\frac{J_1(2\mu)}{\mu}\right]+i\,\frac{\pi c\rho_0 v_0}{4k^2}M_1(2\mu),$$

donde

$$M_1(x)=\int_0^x M_0(\xi)\,d\xi=\frac{2}{\pi}\left(\frac{x^3}{1^2\cdot 3}-\frac{x^5}{1^2\cdot 3^2\cdot 5}+\frac{x^7}{1^2\cdot 3^2\cdot 5^2\cdot 7}+\ldots\right).$$

Si la masa de la placa es pequeña, es decir, a es pequeña y por consiguiente μ también ($\mu\ll 1$), entonces

$$F\approx\frac{\pi c\rho_0\mu^4 v_0}{4k^2}+i\,\frac{8c\rho_0}{3k^2}\mu^3 v_0.$$

La impedancia es

$$\zeta=i\,\frac{2\mu}{\pi}+\frac{\mu^2}{2}$$

Solución. Para calcular el potencial de la capa simple sobre la placa misma es conveniente elegir las coordenadas polares ρ, φ de cualquier punto de la circunferencia $\rho=a'$ en calidad de polo.

Entonces

$$U=\frac{v_0}{2\pi}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\int_0^{2a'\cos\varphi}e^{-ik\rho}\,d\rho\,d\varphi=\frac{v_0}{ik\pi}\int_0^{\pi/2}\{1-e^{-2ika'\cos\varphi}\}\,d\varphi.$$

Teniendo en cuenta que

$$\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2}e^{-2ika'\cos\varphi}\,d\varphi=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2}e^{-2ika'\operatorname{sen}\varphi}\,d\varphi=$$

$$=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2}\cos(2ka'\operatorname{sen}\varphi)\,d\varphi-\frac{2i}{\pi}\int_0^{\pi/2}\operatorname{sen}(2ka'\operatorname{sen}\varphi)\,d\varphi=J_0(2ka')-iM_0(2ka'),$$

donde $M_0(x)$ es cierta función que se determina por la fórmula

$$M_0(x)=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2}\operatorname{sen}(x\operatorname{sen}\varphi)\,d\varphi=\frac{2}{\pi}\left(x-\frac{x^3}{1^2\cdot 3^2}+\frac{x^5}{1^2\cdot 3^2\cdot 5^2}-\ldots\right).$$

Cuando $x \to \infty$, para $M_0(x)$ tiene lugar la fórmula asintótica

$$M_0(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \operatorname{sen}\left(x - \frac{\pi}{4}\right) + \frac{2}{\pi x} + O\left(\frac{1}{x^{3/2}}\right).$$

Por consiguiente, para $p|_{r=a}$ es válida la fórmula (1). Para hallar la fuerza de la reacción que actúa sobre la placa se debe calcular la integral

$$F = 2\pi \int_0^a p|_{r=a'} a'\,da' = -i\pi c\rho_0 v_0 \frac{1}{4k^2} \times$$

$$\times \left\{ \int_0^{2\mu} \left(1 - J_0(\xi')\right) \xi'\,d\xi' - i \int_0^{2\mu} M_0(\xi)\,\xi\,d\xi \right\} =$$

$$= \frac{a^2\pi\rho_0 c v_0}{2} \left[1 - \frac{J_1(2\mu)}{\mu}\right] + i\,\frac{\pi c\rho_0 v_0}{4k^2}\, M_1(2\mu),$$

donde

$$M_1(x) \int_0^{\infty} M_0(\xi)\,\xi\,d\xi.$$

58. En la zona de la onda (para $kr \gg 1$)

$$p = iks\rho_0 a^2 \frac{e^{-ikr}}{r} \sum_{m=0}^{\infty} A_m \Phi_m(\theta),$$

$$v = ika^2 \frac{e^{-ikr}}{r} \sum_{m=0}^{\infty} A_m \Phi_m(0),$$

donde A_m son los coeficientes del desarrollo de $v|_{z=0} = f(\rho)$ en serie, con respecto a las funciones $J_0\left(\frac{\mu m}{a}\rho\right)$, iguales a

$$A_m = \frac{2}{a^2 J_1^2(\mu_m)} \int_0^a f(\rho)\, J_0\left(\frac{\mu m}{a}\rho\right) \rho\,d\rho,$$

$$\Phi_m(\theta) = \frac{2sJ_1(s)}{s^2 - \mu_m^2}, \qquad s = ka \operatorname{sen}\theta,$$

μ_m es la raíz de la ecuación $J_1(\mu) = 0$.

Resolución. Utilizando el desarrollo de $f(\rho)$ en serie

$$v|_{z=0} = f(\rho) = \sum_{m=0}^{\infty} A_m J_0\left(\frac{\mu_m}{a}\rho\right),$$

hallamos:

$$p = \frac{ikc\rho_0}{2\pi} \sum_{m=0}^{\infty} A_m \int_0^a J_0\left(\frac{\mu_m}{a}\rho\right) \rho\,d\rho \int_0^{2\pi} \frac{e^{-ikR}}{R}\,d\varphi.$$

En la zona de la onda

$$\frac{e^{-ikR}}{R} \approx \frac{e^{-ikr}}{r} e^{ik\rho \operatorname{sen} \theta \cos \varphi}$$

(véase el problema 56). Los cálculos dan:

$$\int_0^a J_0\left(\frac{\mu_m}{a}\rho\right) \rho\, d\rho \int_0^{2\pi} e^{ik\rho \operatorname{sen}\theta \cos\varphi}\, d\varphi = 2\pi \int_0^a J_0\left(\frac{\mu_m}{a}\rho\right) J_0(k\rho \operatorname{sen} \theta)\, \rho\, d\rho.$$

Para hallar esta integral nos servimos de la fórmula

$$\int_0^a J_\nu(d\rho) J_\nu(\beta\rho)\, \rho\, d\rho = \frac{a}{\beta^2 - \alpha^2} [\alpha J_\nu'(\alpha a) J_\nu(\beta a) - \beta J_\nu'(\beta a) J_\nu(\alpha a)],$$

hacemos $\alpha = \mu_m/a$, $\beta = k \operatorname{sen} \theta$, $\nu = 0$, entonces obtenemos:

$$\int_0^a J_0(\alpha\rho) J_0(\beta\rho)\, \rho\, d\rho = \frac{a^2 s J_1(s)}{s^2 - \mu_m^2} J_0(\mu_m) \qquad (J_1(\mu_m) = 0),$$

de modo que

$$p = ikc\rho_0 a^2 \sum_{m=0}^{\infty} \frac{A_m J_0(\mu_m)\, s J_1(s)}{s^2 - \mu_m^2} \frac{e^{-ikr}}{r}.$$

El primer término ($m = 0$, $\mu_0 = 0$) de esta serie es la solución del problema 56 sobre las oscilaciones de un pistón rígido en una pantalla infinita

$$p = \frac{ikc\rho_0 a^2}{2} A_0 \left[\frac{2J_1(s)}{s}\right] + \ldots,$$

$$S = ka \operatorname{sen} \theta$$

además A_0, obviamente, significa la velocidad media del pistón.

3. Difracción sobre el cilindro y la esfera

59. Si la onda plana se propaga a lo largo del eje x que es perpendicular al eje del cilindro (al eje z), entonces la presión dentro de ella se puede representar en la forma

$$p_0 = Ae^{-ikx} = Ae^{-ikr\cos\varphi} = A\left[J_0(kr) + 2\sum_{m=1}^{\infty} (-i)^m J_m(kr) \cos m\varphi\right].$$

La presión dentro de la onda dispersa es

$$p_s = \sum_{m=0}^{\infty} B_m \cos m\varphi H_m^{(2)}(kr),$$

donde

$$B_0 = -\frac{J_1(ka)}{H_1^{(2)\prime}(ka)} A, \quad B_m = -\frac{2(-i)^m J_m(ka)}{H_m^{(2)\prime}(ka)} A \quad (m = 1, 2, \ldots)$$

17*

La velocidad en la onda dispersa es

$$v_{s_r}=\frac{i}{c\rho_0}\sum_{m=0}^{\infty}B_m H_m^{(2)\prime}(kr)\cos m\varphi.$$

En la zona de la onda (a grandes distancias del cilindro $kr \gg 1$)

$$p_s=\sqrt{\frac{2}{\pi kr}}\,e^{-i\left(kr-\frac{\pi}{4}\right)}\sum_{m=0}^{\infty}B_m i^m\cos m\varphi,$$

$$v_{s_r}=\frac{1}{c\rho_0}\sqrt{\frac{2}{\pi kr}}\,e^{-i\left(kr-\frac{\pi}{4}\right)}\sum_{m=0}^{\infty}B_m i^m\cos m\varphi=\frac{1}{c\rho_0}p_s$$

60. La intensidad de la onda dispersa es

$$Y_s=\frac{2Y_0}{\pi kr}|F_s|^2,$$

$$F_s=\sum_{m=0}^{\infty}\varepsilon_m \operatorname{sen}\gamma_m e^{i\gamma_m}\cos m\varphi,\quad \varepsilon_0=1,\quad \varepsilon_m=2,\quad m>0,$$

$$|F_s|^2=\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\varepsilon_m\varepsilon_n \operatorname{sen}\gamma_m \operatorname{sen}\gamma_n\cos(\gamma_m-\gamma_n)\cos m\varphi\cos n\varphi,$$

γ_m se determina de las relaciones

$$\operatorname{tg}\gamma_0=-\frac{J_1(\mu)}{N_1(\mu)},$$

$$\operatorname{tg}\gamma_m=\frac{J_{m-1}(\mu)-J_{m+1}(\mu)}{N_{m+1}(\mu)-N_{m-1}(\mu)},\quad \mu=ka,$$

N_m es la función de Neumann. La potencia total del sonido disperso por unidad de longitud del cilindro es

$$\Pi_s=\frac{4Y_0}{k}\sum_{m=0}^{\infty}\varepsilon_m \operatorname{sen}^2\gamma_m,\quad Y_0=\frac{A^2}{2c\rho_0}.$$

Indicación. Utilizando las relaciones

$$J_m'=0{,}5\,(J_{m-1}-J_{m+1}),\quad N_m'=0{,}5\,(N_{m-1}-N_{m+1}),$$

no es difícil expresar los coeficientes B_m en la forma

$$B_m=-A\varepsilon_m(-i)^{m+1}e^{-i\gamma_m}\operatorname{sen}\gamma_m,$$

donde

$$\varepsilon_0=1,\quad \varepsilon_m=2,\quad m\geqslant 1;$$

en la zona de la onda tenemos:

$$p_s = i\sqrt{\frac{4\rho_0 cY}{\pi kr}}\,\frac{4\rho_0 cY_0}{\pi kr}\,F_s(\varphi)\,e^{-i\left(kr-\frac{\pi}{4}\right)},$$

$$v_{s_r} = \frac{1}{\rho c}\,p_s$$

61. Si $ka \ll 1$, entonces en la zona de la onda tendremos:

$$p_s = \frac{i\sqrt{\pi}\,a^2k^2A}{2\sqrt{2kr}}\,e^{-i\left(kr-\frac{\pi}{4}\right)}(1-2\cos\varphi)+\ldots,$$

$$v_{s_r} = \frac{1}{c\rho_0}\,p_s.$$

La intensidad es

$$\overline{Y}_s = \frac{\pi k^3a^4}{8r}\,\overline{Y}_0\,(1-2\cos\varphi)^2, \qquad \overline{Y}_0 = \frac{A^2}{2c\rho_0}.$$

La potencia total es igual a

$$\Pi_s \quad \frac{3}{4}\,\pi^2k^3a^4\overline{Y}_0+\ldots = \frac{6\pi^5a^4}{\lambda^3}\,\overline{Y}_0+\ldots,$$

donde λ es la longitud de la onda ($k = 2\pi/\lambda = \omega/c$). La presión total sobre la superficie del cilindro es

$$p_n = (p_0+p_s)|_{r=a} = \frac{4A}{\pi ka}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{\varepsilon_m\cos m\varphi}{\alpha_m}\,e^{-i\left(\gamma_m-\frac{\pi m}{2}\right)}, \quad \varepsilon_0 = 1,$$

$$\varepsilon_m = 2, \quad m \geqslant 1,$$

donde

$$\alpha_m = \frac{\sqrt{[J_{m+1}(\mu)-J_{m-1}(\mu)]^2+[N_{m+1}(\mu)-N_{m-1}(\mu)]^2}}{2}.$$

La fuerza total que actúa por unidad de longitud del cilindro, dirigida según la línea de propagación de la onda plana, es igual a

$$F = a\int_0^{2\pi} p_n\cos\varphi\,d\varphi = \frac{4A}{d\alpha_1}\,e^{i\left(\gamma_1-\frac{\pi}{2}\right)}.$$

Si $\mu = ka \ll 1$, entonces

$$p_n = A\left(\frac{1}{2}+2i\mu\cos\varphi\right),$$

$$F = -2i\pi a^2kA.$$

Si $\mu = ka \gg 1$, entonces

$$F = -\sqrt{4a\lambda}\,Ae^{i\left(\mu-\frac{\pi}{4}\right)}.$$

Indicación. Se deben utilizar las fórmulas aproximadas:
a) para $\mu \gg m + 1/2$

$$\alpha_0 \approx \sqrt{\frac{8}{\pi\mu}}, \quad \gamma_0 \approx \mu - \frac{\pi}{4}, \quad \alpha_m \approx \sqrt{\frac{2}{\pi\mu}}, \quad \gamma_m \approx \mu - \frac{1}{2}\pi\left(m + \frac{1}{2}\right),$$

b) para $\mu = ka \ll m + 1/2$

$$\alpha_0 \approx \frac{4}{\pi\mu}, \quad \gamma_0 \approx \frac{\pi\mu^2}{4}, \quad \alpha_m \approx \frac{m!}{2\pi}\left(\frac{2}{\mu}\right)^{m+1}, \quad \gamma_m \approx -\frac{\pi m}{(m!)^2}\left(\frac{\mu}{2}\right)^{2m} \quad (m>0).$$

62. Sea que la onda plana se propaga a lo largo del eje z

$$\overline{p}_0 = Ae^{i(\omega t - kz)} = p_0 e^{i\omega t}, \quad p_0 = Ae^{-ikz} = Ae^{-ikr\cos\theta}.$$

La presión y la velocidad radial dentro de la onda dispersa se dan por las fórmulas

$$p_s = \sum_{m=0}^{\infty} B_m \zeta_m^{(2)}(kr)\, P_m(\cos\theta),$$

$$v_{s_r} = -\frac{1}{ikc\rho_0}\frac{\partial p}{\partial r} = \frac{i}{c\rho_0}\sum_{m=0}^{\infty} B_m \zeta_m^{(2)\prime}(kr)\, P_m(\cos\theta),$$

donde

$$\zeta_m^{(2)}(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2x}}\, H^{(2)}_{m+\frac{1}{2}}(x),$$

$$B_m = -A(-i)^m(2m+1)\frac{\psi_m(\mu)}{\zeta_m^{(2)\prime}(\mu)}, \quad \mu = ka,$$

$$\psi_m(\mu) = \sqrt{\frac{\pi}{2\mu}}\, J_{\mu+\frac{1}{2}}(\mu).$$

Los coeficientes B_m es conveniente representarlos en la forma

$$B_m = -A(-i)^{(m+1)}(2m+1)\operatorname{sen}\beta_m e^{i\beta_m},$$

donde β_m se determina de las ecuaciones*)

$$\left.\begin{aligned} mf_{m-1}(\mu) - (m+1)f_{m+1}(\mu) &= -(2m+1)D_m\cos\beta_m = \\ &= -(2m+1)f_m'(\mu), \\ (m+1)\psi_{m+1}(\mu) - m\psi_{m-1}(\mu) &= -(2m+1)D_m\operatorname{sen}\beta_m = \\ &= -(2m+1)\psi_m'(\mu). \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

Aquí

$$f_m = \sqrt{\frac{\pi}{2\mu}}\, N_{m+\frac{1}{2}}(\mu).$$

*) Véase [38], pág. 351.

En la zona de la onda ($r \to \infty$)

$$p_s = \frac{e^{-i\left(kr - \frac{\pi}{2}\right)}}{kr} \sum_{m=0}^{\infty} B_m i^m P_m(\cos\theta), \qquad v_s = \frac{1}{c\rho_0} p_s.$$

La intensidad de la onda dispersa es

$$\overline{Y}_s = \overline{Y}_0 \frac{1}{k^2 r^2} \sum_{m,\, n=0}^{\infty} (2m+1)(2n+1) \operatorname{sen}\beta_m \operatorname{sen}\beta_n \times$$
$$\times \cos(\beta_m - \beta_n) P_m(\cos\theta) P_n(\cos\theta).$$

La potencia total es igual a

$$\Pi_s = \overline{Y}_0 \frac{4\pi}{k^2} \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1) \operatorname{sen}^2 \beta_n, \qquad \overline{Y}_0 = \frac{A^2}{2c\rho_0}.$$

Indicación. Buscamos la solución en forma de serie

$$p_s = \sum_{m=0}^{\infty} B_m \zeta_m^{(2)}(kr) P_m(\cos\theta),$$

donde los coeficientes B_m deben ser determinados de la condición de frontera $\left.\frac{\partial(p_0 - p_s)}{\partial r}\right|_{r=a} = 0$. Para su determinación es necesario obtener el desarrollo de la onda plana en la serie. Demostremos que tiene lugar la fórmula

$$e^{-i\rho\cos\theta} = \sum_{m=0}^{\infty} C_m \psi_m(\rho) P_m(\cos\theta),$$

donde

$$C_m = (2m+1)(-i)^m.$$

En realidad, suponemos:

$$C_m \psi_m(\rho) = \frac{2m+1}{2} \int_{-1}^{1} e^{-i\rho\xi} P_m(\xi)\, d\xi.$$

La integración por partes para ρ grandes da:

$$\int_{-1}^{1} e^{-i\rho\xi} P_m(\xi)\, d\xi = 2(-i)^m \frac{\operatorname{sen}\left(\rho - \frac{m\pi}{2}\right)}{\rho} + 0\left(\frac{1}{\rho}\right).$$

Por otra parte

$$\psi_m(\rho) = \frac{\operatorname{sen}\left(\rho - \frac{m\pi}{2}\right)}{\rho} + 0\left(\frac{1}{\rho}\right),$$

donde $O\left(\frac{1}{\rho}\right)$ son los términos de más alto orden de pequeñez que $\frac{1}{\rho}$. De la coincidencia de las asintóticas de ambos miembros se deduce que

$$C_m = (2m+1)(-i)^m.$$

63. Si $\mu = ka \ll 1$, entonces

$$\left.\begin{aligned} p_s &\approx -\frac{Aa\mu^2}{3r}\left(1-\frac{3}{2}\cos\theta\right)e^{-ikr}, \\ v_s &= \frac{1}{c\rho}\,p_s \end{aligned}\right\} \text{ en la zona de onda } (kr \gg 1).$$

La intensidad del sonido dispersado por la esfera es

$$\overline{Y}_s = \frac{\mu^4 a^2}{9r^2}\,\overline{Y}_0\left(1-\frac{3}{2}\cos\theta\right)^2+\ldots,$$

$$\overline{Y}_0 = \frac{A^2}{2c\rho_0}.$$

La potencia total del sonido dispersado por la esfera es igual a

$$\Pi_s = \frac{7\pi a^6 k^4}{9}\,\overline{Y}_0+\ldots = \frac{112}{9}\,\frac{\pi^5 a^6}{\lambda^4}\,\overline{Y}_0+\ldots \quad (\lambda \text{ es la longitud de onda}).$$

La fuerza que actúa sobre la esfera en la dirección z es

$$F = 2\pi a^2\int_0^\pi p|_{r=a}\cos\theta\,\mathrm{sen}\,\theta\,d\theta = -2\pi i a^2\mu A.$$

La presión sobre la superficie de la esfera es igual a

$$p_c = (p_0+p_s)\,|_{r=a} = A\left(1-\frac{3}{2}i\mu\cos\theta\right)+\ldots \quad \text{para} \quad \mu \ll 1.$$

Indicación. Las expresiones para p_s, $\overline{Y}_s$ y Π_s se pueden obtener mediante el cálculo directo, utilizando las fórmulas aproximadas

$$\psi_0'(\mu) \approx -\frac{\mu}{3}, \quad \psi_1' \approx \frac{1}{3}, \quad \zeta_0^{(2)\prime} \approx -\frac{i}{\mu^2}, \quad \zeta_1^{(2)\prime} \approx -\frac{2i}{\mu^3} \quad (\mu \ll 1),$$

o de las fórmulas generales obtenidas en la solución del problema anterior. Con esto, se deben tener en cuenta las siguientes fórmulas aproximadas para β_m y D_m.

Si $\mu \gg m+\frac{1}{2}$,

$$D_m \approx \frac{1}{\mu}, \qquad \beta_m \approx \mu-\frac{1}{2}\pi(m+1).$$

Si $\mu \ll m+\frac{1}{2}$, entonces $D_0 \approx \frac{1}{\mu^2}$, $\beta_0 \approx \frac{1}{3}\mu^3$,

$$D_m \approx \frac{1\cdot 3\cdot 5\ \ldots\ (2m-1)(m+1)}{\mu^{m+2}},$$

$$\beta_m \approx \frac{m\mu^{2m+1}}{1^2\cdot 3^2\cdot 5^2\ \ldots\ (2m-1)^2(2m+1)^2(m+1)}.$$

64. Sobre la esfera cae la onda plana

$$p_0 = Ae^{-ikr\cos\theta}.$$

La presión en la onda dispersa es igual a

$$p_s = \sum_{m=0}^{\infty} B_m \zeta_m^{(2)}(kr)\, P_m(\cos\theta)$$

donde

$$B_m = -\frac{(-i)^n (2m+1) A\psi_m'(\mu)}{\zeta_m^{(2)\prime}(\mu)} \quad \text{para} \quad m \neq 1,$$

$$B_1 = 3iA\,\frac{\rho_0\psi_1(\mu) - \rho_1\psi'(\mu)\cdot\mu}{\rho_0\zeta_1^{(2)}(\mu) - \rho_1\zeta_1^{(2)\prime}(\mu)\,\mu},$$

ρ_1 es la densidad de la esfera.

La componente radial de la velocidad es igual a

$$v_s = \frac{1}{c\rho_0}\sum_{m=0}^{\infty} B_m \zeta_m^{(2)\prime}(kr)\, P_m(\cos\theta)$$

(acerca de los valores ψ_1 y $\zeta_1^{(2)}$ véase el problema 62).

Resolución. La ecuación de movimiento del centro de gravedad de la esfera bajo la acción del aire es de la forma

$$M\ddot{\xi} = -\iint (\bar{p}_0 - \bar{p}_s)_{r=a}\cos\theta a^2\, d\Omega,$$

donde $M = \frac{4\pi}{3}a^3\rho_1$ es la masa de la esfera, o

$$M\omega^2\xi = a^2 \iint (\bar{p}_0 + \bar{p}_s)_{r=a}\cos\theta\, d\Omega. \tag{1}$$

La condición de frontera para $r = a$ se puede escribir del modo siguiente

$$\frac{i}{kc\rho_0}\frac{\partial}{\partial r}(\bar{p}_0 + \bar{p}_s)\,|_{r=a} = i\omega\xi\cos\theta. \tag{2}$$

Multiplicando (1) y (2), eliminamos ξ y obtenemos la condición de frontera sobre la superficie de la esfera

$$\frac{2a\rho_1}{3}\frac{\partial}{\partial r}(\bar{p}_0 + \bar{p}_s)\,|_{r=a} = \rho_0\cos\theta\int_0^{\pi}(\bar{p}_0 - \bar{p}_s)_{r=a}\, P_1(\cos\theta)\operatorname{sen}\theta\, d\theta, \tag{3}$$

donde

$$P_1(\cos\theta) = \cos\theta.$$

Utilizando el desarrollo de la onda plana con respecto a las funciones esféricas

$$p_0 = Ae^{-ikr\cos\theta} = \sum_{m=0}^{\infty} A_m \psi_m(kr) P_m(\cos\theta), \qquad A_m = (-i)^m (2m+1) A$$

y tomando

$$p_s = \sum_{m=0}^{\infty} B_m \zeta_m^{(2)}(kr) P_m(\cos\theta),$$

obtenemos de (3), en virtud de la ortogonalidad de los polinomios de Legendre,

$$B_m = \begin{cases} -\dfrac{\rho_0\psi_1(\mu) - \rho_1\psi_1'(\mu)\mu}{\rho_0\zeta_1^{(2)}(\mu) - \rho_1\mu\zeta_1^{(2)'}(\mu)} A & \text{para} \quad m=1, \\ -\dfrac{A_m\psi_m'(\mu)}{\zeta_m^{(2)'}(\mu)} & \text{para} \quad m \neq 1. \end{cases}$$

65.
$$p_s = \sum_{m=0}^{\infty} B_m \zeta_m^{(2)}(kr) P_m(\cos\theta),$$

donde

$$B_1 = -A_1 \frac{\rho_0\psi_1(\mu) - \rho_1\left(1-\dfrac{\mu_0^2}{\mu^2}\right)\mu\psi_1'(\mu)}{\rho_0\zeta_1^{(2)}(\mu) - \rho_1\left(1-\dfrac{\mu_0^2}{\mu^2}\right)\mu\zeta_1^{(2)'}(\mu)}, \qquad \mu_0 = \frac{\omega_0}{c} a, \qquad \mu = ka,$$

$$B_m = -A_m \frac{\psi_m'(\mu)}{\zeta_m^{(2)'}(\mu)}, \qquad (m \neq 1)$$

En caso de resonancia, es decir, para $\mu = \mu_0$,

$$B_1 = -A_1 \frac{\psi_1(\mu)}{\zeta_1^{(2)}(\mu)}.$$

Si sobre la esfera cae la onda plana, entonces $A_1 = -3i$. Si no existe el campo exterior, entonces obtenemos la ecuación característica

$$\rho_0\zeta_1^{(2)}(\mu) = \rho_1\left(1-\frac{\mu_0^2}{\mu^2}\right)\mu\zeta_1^{(2)'}(\mu),$$

de la cual se determina la frecuencia ω de las oscilaciones «libres» de la esfera generadas por el medio exterior.

Indicación. Véase el problema anterior.

§ 4. Oscilaciones electromagnéticas estables

1. Ecuaciones de Maxwell. Potenciales. Fórmulas vectoriales de Green—Ostrogradski

66. Las ecuaciones de Maxwell en un medio no conductor sin manantiales

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{rot} H &= \frac{1}{c}\frac{\partial D}{\partial t}, \qquad \operatorname{div} B = 0, \qquad B = \mu H, \\ \operatorname{rot} E &= -\frac{1}{c}\frac{\partial B}{\partial t}, \qquad \operatorname{div} D = 0, \qquad D = \varepsilon E \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

en las coordenadas curvilíneas ortogonales tienen la forma

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\varepsilon}{c} h_2 h_3 \frac{\partial E_1}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x_2} h_3 H_3 - \frac{\partial}{\partial x_3} h_2 H_2,\\
&\frac{\varepsilon}{c} h_3 h_1 \frac{\partial E_2}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x_3} h_1 H_1 - \frac{\partial}{\partial x_1} h_3 H_3,\\
&\frac{\varepsilon}{c} h_1 h_2 \frac{\partial E_3}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x_1} h_2 H_2 - \frac{\partial}{\partial x_2} h_1 H_1,\\
&-\frac{\mu}{c} h_2 h_3 \frac{\partial H_1}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x_2} h_3 E_3 - \frac{\partial}{\partial x_3} h_2 E_2,\\
&-\frac{\mu}{c} h_3 h_1 \frac{\partial H_2}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x_3} h_1 E_1 - \frac{\partial}{\partial x_1} h_3 E_3,\\
&-\frac{\mu}{c} h_1 h_2 \frac{\partial H_3}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x_1} h_2 E_2 - \frac{\partial}{\partial x_2} h_1 E_1,\\
&\frac{\partial}{\partial x_1} h_2 h_3 H_1 + \frac{\partial}{\partial x_2} h_3 h_1 H_2 + \frac{\partial}{\partial x_3} h_1 h_2 H_3 = 0,\\
&\frac{\partial}{\partial x_1} h_2 h_3 E_1 + \frac{\partial}{\partial x_2} h_3 h_1 E_2 + \frac{\partial}{\partial x_3} h_1 h_2 E_3 = 0,\\
&(ds^2 = h_1^2\, dx_1^2 + h_2^2\, dx_2^2 + h_3^2\, dx_3^2).
\end{aligned}\right\} \tag{2}$$

Si la dependencia de los campos con respecto al tiempo, se da por el multiplicador $e^{-i\omega t}$, entonces en estas ecuaciones se debe realizar la sustitución, utilizando las relaciones

$$\frac{1}{c}\frac{\partial E_m}{\partial t} = -ik_0 E_m, \quad \frac{1}{c}\frac{\partial H_m}{\partial t} = -ik_0 H_m \quad \left(k_0 = \frac{\omega}{c},\ m = 1, 2, 3\right) \tag{3}$$

En el sistema de coordenadas esféricas

$$x_1 = r, \quad x_2 = \theta, \quad x_3 = \varphi \quad \text{y} \quad h_1 = 1, \quad h_2 = r, \quad h_3 = r \operatorname{sen} \theta.$$

En el sistema de coordenadas cilíndricas

$$x_1 = \rho, \quad x_2 = \varphi, \quad x_3 = z \quad \text{y} \quad h_1 = 1, \quad h_2 = r, \quad h_3 = 1.$$

Indicación. Utilizar las expresiones de los operadores div y rot en el sistema de coordenadas curvilíneas (véase Complemento).

67. Si la dependencia con respecto al tiempo se da por el multiplicador $e^{-i\omega t}$, entonces para los potenciales vectorial y escalar se puede escribir las ecuaciones

$$\left.\begin{aligned}
&\Delta A + k^2 A = -\frac{4\pi}{c}\mu j,\\
&\Delta\varphi + k^2\varphi = -\frac{4\pi}{e}\rho,
\end{aligned}\quad k^2 = \frac{\omega^2}{a^2}, \quad a^2 = \frac{c^2}{\varepsilon\mu},\right\} \tag{1}$$

además

$$\varphi = \frac{-ic}{\varepsilon\mu\omega} \operatorname{div} A, \tag{2}$$

es decir, el potencial escalar puede ser eliminado (j es el vector de densidad de la corriente).

La expresión para ΔA en el sistema arbitrario curvilíneo ortogonal de coordenadas es de la forma

$$\Delta A = -\text{rot rot } A + \text{grad div } A,$$

donde

$$\begin{aligned}
\text{rot rot } A = & \frac{1}{h_2h_3}\left\{\frac{\partial}{\partial x_2}\frac{h_3}{h_1h_2}\left[\frac{\partial}{\partial x_1}(h_2A_2)-\frac{\partial}{\partial x_2}(h_1A_1)\right]-\right.\\
& \left.-\frac{\partial}{\partial x_3}\frac{h_2}{h_3h_1}\left[\frac{\partial}{\partial x_3}(h_1A_1)-\frac{\partial}{\partial x_1}(h_3A_3)\right]\right\}i_1+\\
& +\frac{1}{h_3h_1}\left\{\frac{\partial}{\partial x_3}\frac{h_1}{h_2h_3}\left[\frac{\partial}{\partial x_2}(h_3A_3)-\frac{\partial}{\partial x_3}(h_2A_2)\right]-\right.\\
& \left.-\frac{\partial}{\partial x_1}\frac{h_3}{h_1h_2}\left[\frac{\partial}{\partial x_1}(h_2A_2)-\frac{\partial}{\partial x_2}(h_1A_2)\right]\right\}i_2+\\
& +\frac{1}{h_1h_2}\left\{\frac{\partial}{\partial x_1}\frac{h_2}{h_3h_1}\left[\frac{\partial}{\partial x_3}(h_1A_1)-\frac{\partial}{\partial x_1}(h_3A_3)\right]-\right.\\
& \left.-\frac{\partial}{\partial x_2}\frac{h_1}{h_2h_3}\left[\frac{\partial}{\partial x_2}(h_3A_3)-\frac{\partial}{\partial x_3}(h_2A_2)\right]\right\}i_3,
\end{aligned}$$

$$\text{grad } \psi = \frac{1}{h_1}\frac{\partial}{\partial x_1}i_1+\frac{1}{h_2}\frac{\partial\psi}{\partial x_2}i_2+\frac{1}{h_3}\frac{\partial\varphi}{\partial x_3}i_3,$$

$$\psi = \text{div } A = \frac{1}{h_1h_2h_3}\left[\frac{\partial}{\partial x_1}(h_2h_3A_1)+\frac{\partial}{\partial x_2}(h_1h_3A_2)+\frac{\partial}{\partial x_3}(h_1h_2A_3)\right],$$

donde i_1, i_2, i_3 son los vectores unitarios directrices del sistema de coordenadas, A_1, A_2, A_3, las componentes del vector A.

68. En el medio homogéneo conductor las ecuaciones de Maxwell son de la forma*)

$$j_{\text{str.}} = 0, \quad \rho = 0,$$

$$\left.\begin{aligned}
\text{rot } H = \frac{4\pi}{c}\sigma E + \frac{\varepsilon}{c}\frac{\partial E}{\partial t}, \quad & \text{div } E = 0,\\
\text{rot } E = -\frac{\mu}{c}\frac{\partial H}{\partial t}, \quad & \text{div } H = 0.
\end{aligned}\right\} \tag{1}$$

Suponiendo

$$H = \frac{1}{\mu}\text{rot } A, \quad E = -\text{grad } \varphi - \frac{1}{c}\frac{\partial A}{\partial t}, \tag{2}$$

obtenemos para A y φ las ecuaciones

$$\Delta\varphi = \frac{\varepsilon\mu}{c^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}+\frac{4\pi\sigma\mu}{c^2}\frac{\partial\varphi}{\partial t}, \tag{3}$$

$$\Delta A = \frac{\varepsilon\mu}{c^2}\frac{\partial^2 A}{\partial t^2}+\frac{4\pi\sigma\mu}{c^2}\frac{\partial A}{\partial t}, \tag{4}$$

*) Véase [17], pág. 420.

además A y φ están relacionadas por la condición de Lorentz

$$\operatorname{div} A+\frac{\varepsilon\mu}{c}\frac{\partial\varphi}{\partial t}+\frac{4\pi\sigma\mu}{c}\varphi=0. \tag{5}$$

Si la dependencia con respecto al tiempo es del tipo $e^{-i\omega t}$, entonces

$$\Delta\varphi+k^2\varphi=0, \quad k^2=\frac{\varepsilon\mu}{c^2}\omega^2+i\frac{4\pi\mu\sigma\omega}{c^2}, \tag{3'}$$

$$\Delta A+k^2A=0, \tag{4'}$$

$$\varphi=\frac{-i\omega}{ck^2}\operatorname{div} A, \tag{5'}$$

es decir, para $\sigma\neq 0$ el número de onda k siempre es complejo.

69. Si en el vacío ($\sigma=0$, $\varepsilon=1$, $\mu=1$) no hay corrientes ni cargas libres, entonces, haciendo $A=\frac{1}{c}\frac{\partial\Pi}{\partial t}$, $\varphi=-\operatorname{div}\Pi$, obtenemos:

$$H=\frac{1}{c}\operatorname{rot}\frac{\partial\Pi}{\partial t}, \quad E=\operatorname{grad}\operatorname{div}\Pi-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\Pi}{\partial t^2}, \tag{1}$$

el potencial polarizado Π satisface la ecuación

$$\Delta\Pi-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\Pi}{\partial t^2}=0. \tag{2}$$

Para la dependencia temporal de tipo $e^{-i\omega t}$ tenemos:

$$H=ik\operatorname{rot}\Pi, \quad E=\operatorname{grad}\operatorname{div}\Pi+k^2\Pi, \tag{1'}$$

y

$$\Delta\Pi+k^2\Pi=0. \tag{2'}$$

El vector magnético de Hertz Π' se introduce así:

$$H'=\operatorname{grad}\operatorname{div}\Pi'-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\Pi'}{\partial t^2}, \quad E'=-\frac{1}{c}\operatorname{rot}\frac{\partial\Pi'}{\partial t}, \tag{3}$$

además

$$\Delta\Pi'=\frac{1}{c^2}\frac{\partial\Pi'}{\partial t^2}. \tag{4}$$

Para la dependencia temporal de tipo $e^{-i\omega t}$ tenemos:

$$H'=\operatorname{grad}\operatorname{div}\Pi'+k^2\Pi', \quad E'=ik\operatorname{rot}\Pi', \tag{3'}$$

$$\Delta\Pi'+k^2\Pi'=0. \tag{4'}$$

Utilizando las ecuaciones (2') y (4') para Π y Π', se puede escribir las fórmulas para E y H' de otra forma:

$$E=\operatorname{rot}\operatorname{rot}\Pi, \quad H'=\operatorname{rot}\operatorname{rot}\Pi'.$$

En el medio conductor para los campos estables ($\sim e^{-i\omega t}$) Π y Π' se introducen formalmente del mismo modo que en el vacío; pero en este caso por k^2 se debe entender la magnitud

$$k^2=\frac{\varepsilon\mu\omega^2}{c^2}+i\frac{4\pi\sigma\mu}{c^2}.$$

70. En el sistema de coordenadas esféricas tenemos:
a) para el campo de tipo eléctrico ($H_r = 0$)

$$\left.\begin{aligned} &E_r = \frac{\partial^2 U}{\partial r^2} + k^2 U, \quad E_\theta = \frac{1}{r}\frac{\partial^2 U}{\partial r\,\partial\theta}, \quad E_\varphi = \frac{1}{r \operatorname{sen}\theta}\frac{\partial^2 U}{\partial r\,\partial\varphi}, \\ &H_r = 0, \quad H_\theta = \frac{-ik}{r \operatorname{sen}\theta}\frac{\partial U}{\partial\varphi}, \quad H_\varphi = \frac{ik}{r}\frac{\partial U}{\partial\theta}; \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

b) para el campo de tipo magnético ($E_r = 0$)

$$\left.\begin{aligned} &E'_r = 0, \quad E'_\theta = \frac{ik}{r \operatorname{sen}\theta}\frac{\partial U'}{\partial\varphi}, \quad E'_\varphi = \frac{-ik}{r}\frac{\partial U'}{\partial\theta}, \\ &H'_r = \frac{\partial^2 U'}{\partial r^2} + k^2 U', \quad H'_\theta = \frac{1}{r}\frac{\partial^2 U'}{\partial r\,\partial\theta}, \quad H'_\varphi = \frac{1}{r \operatorname{sen}\theta}\frac{\partial^2 U'}{\partial r\,\partial\varphi}, \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

además los potenciales U y U' satisfacen la ecuación

$$\frac{\partial^2 U}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2 \operatorname{sen}\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\operatorname{sen}\theta\,\frac{\partial U}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2 \operatorname{sen}^2\theta}\frac{\partial^2 U}{\partial\varphi^2} + k^2 U = 0, \tag{3}$$

ó

$$\Delta U + k^2 U - \frac{2}{r}\frac{\partial U}{\partial r} = 0$$

y las funciones $u = Ur$, $u' = U'r$ satisfacen la ecuación de la onda

$$\Delta u + k^2 u = 0.$$

En el sistema cilíndrico de coordenadas (z, φ, ρ)
a) para el campo de tipo eléctrico ($H_z = 0$)

$$\left.\begin{aligned} &E_z = \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} + k^2 U, \quad E_\varphi = \frac{1}{\rho}\frac{\partial^2 U}{\partial\varphi\,\partial z}, \quad E_\rho = \frac{\partial^2 U}{\partial\rho\,\partial z}, \\ &H_z = 0, \quad H_\varphi = -ik\frac{\partial U}{\partial\rho}, \quad H_\rho = \frac{ik}{\rho}\frac{\partial U}{\partial\varphi}; \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

b) para el campo de tipo magnético ($E_z = 0$) tenemos:

$$\left.\begin{aligned} &E'_z = 0, \quad E'_\varphi = ik\frac{\partial U'}{\partial\rho}, \quad E'_\rho = \frac{-ik}{\rho}\frac{\partial U'}{\partial\varphi}, \\ &H'_z = \frac{\partial^2 U'}{\partial z^2} + k^2 U', \quad H'_\varphi = \frac{1}{\rho}\frac{\partial^2 U'}{\partial\varphi\,\partial z}, \quad H'_\rho = \frac{\partial^2 U'}{\partial\rho\,\partial z}, \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

además U y U' satisfacen la ecuación

$$\frac{\partial^2 U}{\partial z^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\,\frac{\partial U}{\partial\rho}\right) + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 U}{\partial\varphi^2} + k^2 U = 0, \tag{6}$$

ó

$$\Delta U + k^2 U = 0.$$

De aquí enseguida se ve que

$$U = \Pi_z, \quad U' = \Pi'_z.$$

En el caso esférico

$$U \neq \Pi_r \quad \text{y} \quad U' \neq \Pi'_r.$$

Indicación. Para demostrar la afirmación principal del problema se deben sustituir las expresiones para las componentes de los campos mediante U (o U')

en las ecuaciones de Maxwell, escritas en el sistema de coordenadas curvilíneas ortogonales (véase el problema 66) y exigir su cumplimiento; de esta exigencia se deduce la ecuación para U (o U').

71.
$$E_1=k^2U+\frac{\partial^2 U}{\partial x_1^2},\quad E_2=\frac{1}{h^2}\frac{\partial^2 U}{\partial x_1\,\partial x_2}+\frac{i\omega\mu}{c}\frac{1}{h_3}\frac{\partial U'}{\partial x_3},$$
$$E_3=\frac{1}{h^3}\frac{\partial^2 U}{\partial x_1\,\partial x_3}-\frac{i\omega\mu}{c}\frac{1}{h^2}\frac{\partial U'}{\partial x_2},$$
$$H_1=k^2U'+\frac{\partial^2 U'}{\partial x_1^2},\quad H_2=-\frac{ik^2c}{\omega\mu}\frac{1}{h_3}\frac{\partial U}{\partial x_3}+\frac{1}{h_2}\frac{\partial^2 U'}{\partial x_1\partial x_2},$$
$$H_3=\frac{ick^2}{\omega\mu}\frac{1}{h^2}\frac{\partial U}{\partial x_2}+\frac{1}{h_3}\frac{\partial^2 U'}{\partial x_1\,\partial x_3},$$

donde U y U' son las soluciones de la ecuación
$$\frac{\partial^2 U}{\partial x_1^2}+\frac{1}{h_2h_3}\left[\frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{h_3}{h_2}\frac{\partial U}{\partial x_2}\right)+\frac{\partial}{\partial x_3}\left(\frac{h_2}{h_3}\frac{\partial U}{\partial x_3}\right)\right]+k^2U=0,$$
$$k_2-\frac{\varepsilon\mu\omega^2}{c^2}+i\,\frac{4\pi\sigma\mu}{c^2}\,\omega.$$

Indicación. Véase el problema 70.

72. Sobre la frontera de separación de los dos medios para $r=a$ deben cumplirse las condiciones
$$\frac{k_1^2}{\mu_1}U_1=\frac{k_2^2}{\mu_2}U_2,\quad \frac{k_1^2}{\mu_1}U_1'=\frac{k_2^2}{\mu_2}U_2',$$
$$\frac{\partial U_1}{\partial r}=\frac{\partial U_2}{\partial r},\qquad \frac{\partial U_1'}{\partial r}=\frac{\partial U_2'}{\partial r},$$

donde los subíndices 1 ó 2 significan el número del medio (1 para $r<a$, 2 para $r>a$), k_1 y k_2 se determinan por las fórmulas
$$k_s^2=\frac{\varepsilon_s\mu_s\omega^2}{c^2}+i\,\frac{4\pi\sigma_s\mu_s\omega}{s^2},\quad s=1,\ 2.$$

Las funciones U_s y U_s' satisfacen la ecuación
$$\frac{\partial^2 U_s}{\partial r^2}+\frac{1}{r^2\operatorname{sen}\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\operatorname{sen}\theta\,\frac{\partial U_s}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{r^2\operatorname{sen}^2\theta}\frac{\partial^2 U_s}{\partial\varphi^2}+k_1^2U_s=0,\quad s=1,\ 2,$$

de modo que
$$\Delta u_s+k_s^2u_s=0,\quad u_s=\frac{U_s}{r}\quad (s=1,\ 2).$$

Indicación. Sobre la frontera de los medios 1 y 2 las componentes tangenciales del vector de la intensidad del campo eléctrico y del vector de la intensidad del campo magnético, en el caso dado E_θ, E_φ, H_θ, H_φ, deben ser continuas.

73. *Indicación.* Utilizar la fórmula vectorial
$$\operatorname{div}[\boldsymbol{ab}]=(\boldsymbol{b}\operatorname{rot}\boldsymbol{a})-(\boldsymbol{a}\operatorname{rot}\boldsymbol{b})\tag{1}$$

y la fórmula de Ostrogradski.

74. *Resolución.* En la fórmula
$$\int_T\{W\operatorname{rot}\operatorname{rot}U-U\operatorname{rot}\operatorname{rot}W\}\,d\tau=\int_\Sigma\{[U\operatorname{rot}W]-[W\operatorname{rot}U]\}\,\boldsymbol{n}\,d\sigma\tag{1}$$

suponemos: $W = a\varphi$, donde $\varphi = \frac{e^{ikr}}{r}$; a, un vector constante arbitrario. Los cálculos dan:

$$\text{rot } W = [\text{grad } \varphi, a], \text{ rot rot } W = ak^2\varphi + \text{grad } (a \text{ grad } \varphi),$$

$$U \text{ rot rot } W = a \{k^2\varphi U - \text{grad } \varphi \text{ div } U\} + \text{div } [(a \text{ grad } \varphi) U],$$

$$[W \text{ rot } U]\, n = [\text{rot } U, n]\, W,$$

$$[U \text{ rot } W]\, n = [U [\text{grad } \varphi, a]] = (Ua) (\text{grad } \varphi, n) - \\ - (U \text{ grad } \varphi) (an).$$

En virtud de la fórmula de Ostrogradski

$$\int_T \text{div } [(a \text{ grad } \varphi) U]\, d\tau = \int_\Sigma (Un) (\text{grad } \varphi, a)\, d\sigma. \qquad (2)$$

Bajo el signo de la integral de superficie en la fórmula (1) está la expresión de Fa, donde

$$F = U (\text{grad } \varphi, n) - (U \text{ grad } \varphi)\, n - [\text{rot } U, n]\, \varphi + (Un) \text{ grad } \varphi = \\ = (Un) \text{ grad } \varphi + [\text{grad } \varphi\, [Un]] + [n \text{ rot } U]\, \varphi. \qquad (3)$$

La expresión subintegral que está en el primer miembro es de la forma Φa, donde

$$\Phi = (\text{rot rot } U - k^2 U)\, \varphi + \text{grad } \varphi \text{ div } U.$$

El vector a es, de este modo, el multiplicador común para todos los términos de la fórmula (1), y dado que es arbitrario, entonces se puede simplificar como resultado obtenemos la fórmula

$$\int_T \Phi\, d\tau = \int_\Sigma F\, d\sigma, \qquad (4)$$

si el punto M_0 no pertenece a la región T. Si el punto M_0 está dentro de T, entonces circunscribiremos alrededor de este punto una esfera pequeña Σ_ε de radio ε y utilizaremos la fórmula (4) a la región $T - T_\varepsilon$ acotada por las superficies Σ y Σ_ε. Estimamos la magnitud F sobre Σ_ε.

Observemos que

$$\text{grad } \varphi \,|_{\Sigma_\varepsilon} = \left(\frac{1}{r} - ik\right) \varphi \,|_{\Sigma_\varepsilon} n \approx \frac{1}{\varepsilon^2}\, n, \quad \varphi \,|_{\Sigma_\varepsilon} \approx \frac{1}{\varepsilon}.$$

Por eso

$$F_{\Sigma_\varepsilon} = \left(\frac{1}{\varepsilon} - ik\right) \varphi(\varepsilon) \{(Un)\, n + [n\, [Un]]\} - [\text{rot } Un]\, \varphi(\varepsilon) \approx \frac{U}{\varepsilon^2}$$

y, por consiguiente,

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\Sigma_\varepsilon} F\, d\sigma = 4\pi U(M_0).$$

Dado que $\lim\limits_{\varepsilon \to 0} \int_{T_\varepsilon} \Phi\, d\tau = 0$ obtenemos en el límite

$$U(M_0) = \frac{1}{4\pi} \int_T \Phi\, d\tau - \frac{1}{4\pi} \int_\Sigma F\, d\sigma$$

ó

$$U(M_0)=\frac{1}{4\pi}\int_T \{(\text{rot rot } U-k^2U)\,\varphi+\text{grad }\varphi \text{ div } U\}\,d\tau_M -$$

$$-\frac{1}{4\pi}\int_\Sigma \{(Un)\text{ grad }\varphi+[[nU]\text{ grad }\varphi]+[n\text{ rot } U]\,\varphi\}\,d\sigma_M. \quad (5)$$

75.

$$E(M_0)=\frac{1}{c\omega\varepsilon}\int_T \{-k^2\varphi j+\text{grad }\varphi\text{ div } j\}\,d\tau -$$

$$-\frac{1}{4}\int_\Sigma \{ik_0\mu\,[nH]\,\varphi+[[nE]\text{ grad }\varphi]+(nE)\text{ grad }\varphi\}\,d\sigma,$$

$$H(M_0)=\frac{1}{c}\int_T [j\text{grad }\varphi]\,d\tau+\frac{1}{4\pi}\int_\Sigma \{ik_0\varepsilon\,[nE]-[[nH]\text{ grad }\varphi]-(nH)\text{ grad }\varphi\}\,d\sigma,$$

donde

$$\varphi=\frac{e^{ikr}}{r},\quad k=\frac{\omega}{c}\sqrt{\varepsilon\mu},\quad k_0=\frac{\omega}{c}.$$

Indicación. En la fórmula general (5) en la respuesta 74 hacer, respectivamente, $U = E$ y $U = H$. En el segundo caso a la derecha aparecerá el sumando $\int_\Sigma [nj]\,\varphi\,d\sigma$, que se debe transformar en integral volumétrica mediante la fórmula

$$\int_\Sigma [nj]\,\varphi\,d\sigma=\int_T \{-[j\text{ grad }\varphi]+\varphi\text{ rot } j\}\,d\sigma. \quad (1)$$

Para su demostración se deben multiplicar ambas partes por un vector arbitrario a y utilizar las relaciones

$$[nj]\,a\varphi = n\,[ja]\,\varphi,$$

$$\text{div }[j, a\varphi]=a\,\varphi\text{ rot } j-(j\text{ rot } a\varphi)=a\,\{\varphi\text{ rot } j-[j\text{ grad }\varphi]\},$$

de modo que

$$\int_\Sigma a\,[nj]\,\varphi\,d\sigma=\int_T \text{div }[j,\ a\varphi]\,d\tau=a\int_T \{\varphi\text{ rot } j-[j\text{ grad }\varphi]\}\,d\tau.$$

De aquí, en virtud de la arbitrariedad de a y se deduce (1).

2. Propagación de las ondas electromagnéticas y de las oscilaciones en los resonadores

76. Dirigiremos el eje z del sistema cilíndrico de coordenadas ρ, φ, z, a lo largo del eje del cilindro.

Sean ε, μ, σ los parámetros del medio ambiente. Existen ondas de la forma

$$E = E_0 e^{-i\alpha z+i\omega t}e^{-\beta|z|}\ (\alpha>0),$$

$$H = H_0 e^{-i\alpha z+i\omega t}e^{-\beta|z|}\ (\beta>0),$$

es decir, las ondas amortiguadas. Aquí se adoptan las designaciones

$$\alpha=\sqrt{\frac{\sqrt{\varepsilon^2\mu^2\omega^4+16\pi^2\sigma^2\mu^2\omega^2}+\varepsilon\mu\omega^2}{2c^2}},$$

$$\beta=\sqrt{\frac{\sqrt{\varepsilon^2\mu^2\omega^4+16\pi^2\sigma^2\mu^2\omega^2}-\varepsilon\mu\omega^2}{2c^2}},$$

$$E_0=(E_{0\rho},\ E_{0\varphi},\ 0),\qquad H_0=(H_{0\rho},\ H_{0\varphi},\ 0),$$

además,

$$E_{0\rho}=\frac{Ak}{\rho},\qquad H_{0\varphi}=-\frac{ck}{\omega\mu}E_{0\rho},$$

$$E_{0\varphi}=\frac{\mu\omega}{kc}H_{0\rho},\quad H_{0\rho}=\frac{Bk}{\rho},$$

donde A y B son unos factores constantes,

$$k^2=\frac{\varepsilon\mu\omega^2}{c^2}-i\,\frac{4\pi\sigma\mu\omega}{c^2},\qquad k=\alpha-i\beta.$$

Si $\varepsilon=1$; $\mu=1$; $\sigma=0$ (el vacío); entonces $k=\frac{\omega}{c}\ k_0$, las ondas a lo largo de este cable se propagan con la velocidad de la luz:

$$E=E_0e^{i(\omega t-k_0z)},\quad E_{0\rho}=\frac{Ak_0}{\rho},\quad H_{0\rho}=-E_{0\varphi},$$

$$H=H_0e^{i(\omega t-k_0z)},\quad E_{0\varphi}=H_{0\varphi},\quad H_{0\rho}=\frac{Bk_0}{\rho}.$$

77. *Resolución.* Sean ε_1, μ_1, σ_1 las características del cable, ε_2, μ_2, σ_2; las características del medio ambiente.

Elegimos el sistema cilíndrico de coordenadas (ρ, φ, z), dirigiendo el eje z a lo largo del eje del cilindro y colocando el origen de las coordenadas sobre el eje del cilindro.

Designando $\Pi_z=u$, $\Pi'_z=v$ y suponiendo que la dependencia de u y v con respecto a z se da por el multiplicador $e^{i\gamma z}$, es decir, $u=u^0e^{i\gamma z}$, $v=v^0e^{i\gamma z}$, etc., obtenemos después de simplificar por este multiplicador

$$\left.\begin{aligned}&E_z^0=p^2u^0,\quad E_\varphi^0=\frac{i\gamma}{\rho}\frac{\partial u^0}{\partial\varphi}-\frac{i\omega\mu}{c}\frac{\partial v^0}{\partial\rho},\qquad E_\rho^0=i\gamma\frac{\partial u^0}{\partial\rho}+\frac{i\omega\mu}{c\rho}\frac{\partial v^0}{\partial\rho},\\&H_z^0=p^2v^0,\quad H_\varphi^0=\frac{ik^2c}{\omega\mu}\frac{\partial u^0}{\partial\rho}+\frac{i\gamma}{\rho}\frac{\partial v^0}{\partial\varphi},\qquad H_\rho^0=-\frac{ik^2c}{\omega\mu}\frac{1}{\rho}\frac{\partial u^0}{\partial\varphi}+i\gamma\frac{\partial v^0}{\partial\rho},\end{aligned}\right\}\quad(1)$$

donde $p^2=k^2-\gamma^2$, $k^2=\frac{\varepsilon\mu\omega^2}{c^2}-i\,\frac{4\pi\sigma\mu\omega}{c^2}$, las funciones

$$u^0=\alpha\psi(\rho,\ \varphi)\quad\text{y}\quad v^0=\beta\psi(\rho,\ \varphi),\tag{2}$$

donde α y β son constantes; $\psi(\rho,\ \varphi)$, la solución de la ecuación

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial\psi}{\partial\rho}\right)+\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial\varphi^2}+p^2\psi=0.$$

De aquí hallamos las soluciones particulares de la forma

$$\psi_n(\rho, \varphi) = \begin{cases} J_n(p\rho)\, e^{in\varphi} & \text{dentro del cilindro} \\ H_n^{(1)}(p\rho)\, e^{in\varphi} & \text{fuera del cilindro} \end{cases} \tag{3}$$

Sustituyendo las expresiones para ψ_n en las fórmulas (1) y (2), obtenemos:
dentro del cilindro

$$E_z^0 = \alpha_1 p_1^2 J_n(p_1\rho)\, e^{in\varphi},$$

$$H_z^0 = \beta_1 p_1^2 J_n(p_1\rho)\, e^{in\varphi},$$

$$E_\varphi^0 = \left[-\frac{\gamma n}{\rho} \alpha_1 J_n(p_s\rho) + \frac{i\omega\mu_1 p_1}{c} \beta_1 J_n'(p_1\rho) \right] e^{in\varphi},$$

$$H_\varphi^0 = \left[-\frac{\gamma n}{\rho} \beta_1 J_n(p_1\rho) - \frac{ik_1^2 c p_1}{\omega\mu_1} \alpha_1 J_n'(p_1\rho) \right] e^{in\varphi},$$

$$E_\rho^0 = \left[\frac{\omega\mu_1 n}{c\rho} \beta_1 J_n(p_1\rho) + i\gamma p_1 \alpha_1 J_n'(p_1\rho) \right] e^{in\varphi},$$

$$H_\rho^0 = \left[-\frac{k_1^2 c n}{\omega\mu_1\rho} \alpha_1 J_n(p_1\rho) + i p_1 \beta_1 J_n'(p_1\rho) \right] e^{in\varphi},$$

fuera del cilindro

$$E_z^0 = \alpha_2 p_2^2 H_n^{(1)}(p_2\rho)\, e^{in\varphi},$$

$$H_z^0 = \beta_2 p_2^2 H_n^{(1)}(p_2\rho)\, e^{in\varphi},$$

$$E_\varphi^0 = \left[-\frac{\gamma n}{\rho} \alpha_2 H_n^{(1)}(p_2\rho) + \frac{i\omega\mu_2 p_2}{c} \beta_2 H_n^{(1)\prime}(p_2\rho) \right] e^{in\varphi},$$

$$H_\varphi^0 = \left[-\frac{\gamma n}{\rho} \beta_2 H_n^{(1)}(p_2\rho) - \frac{ik_2^2 c p_2}{\omega\mu_2} \alpha_2 H_n^{(1)\prime}(p_2\rho) \right] e^{in\varphi},$$

$$E_\rho^0 = \left[\frac{\omega\mu_2 n}{c\rho} \beta_2 H_n^{(1)}(p_2\rho) + i\gamma p_2 \alpha_2 H_n^{(1)\prime}(p_2\rho) \right] e^{in\varphi},$$

$$H_\rho^0 = \left[-\frac{k_2^2 c n}{\omega\mu_2\rho} \alpha_2 H_n^{(1)}(p_2\rho) + i\gamma p_2 \beta_2 H_n^{(1)\prime}(p_2\rho) \right] e^{in\varphi}.$$

Sobre la frontera $\rho = a$ deben ser continuas las componentes tangenciales de E y H. Esto da cuatro ecuaciones homogéneas con cuatro incógnitas α_1, α_2, β_1, β_2. Igualando el determinante del sistema a cero, obtenemos la ecuación de dispersión con respecto a γ

$$\left[\frac{k_1^2}{\mu_1\xi} \frac{J_n'(\xi)}{J_n(\xi)} - \frac{k_2^2}{\mu_2\eta} \frac{H_n^{(1)\prime}(\eta)}{H_n^{(1)}(\eta)} \right] \left[\frac{\mu_1}{\xi} \frac{J_n'(\xi)}{J_n(\xi)} - \right.$$

$$\left. - \frac{\mu_2}{\eta} \frac{H_n^{(1)\prime}(\eta)}{H_n^{(1)}(\eta)} \right] = n^2\gamma^2 \left(\frac{1}{\eta^2} - \frac{1}{\xi^2} \right)^2, \tag{4}$$

donde $\xi = p_1 a$; $\eta = p_2 a$; a, el radio del cilindro. Esta ecuación tiene un conjunto infinito de raíces γ_{nm} (véase [35], pág. 460).

Para la onda principal $n = 0$ la ecuación de dispersión se descompone en dos ecuaciones:

$$\frac{\eta H_0^{(1)}(\eta)}{H_1^{(1)}(\eta)} = \frac{k_2^2\mu_1}{k_1^2\mu_2}\,\frac{\xi J_0(\xi)}{J_1(\xi)}, \tag{5}$$

$$\frac{\eta H_0^{(1)}(\eta)}{H_1^{(1)}(\eta)} = \frac{\mu_2}{\mu_1}\,\frac{\xi J_0(\xi)}{J_1(\xi)}. \tag{6}$$

La primera de ellas determina las ondas admisibles de tipo magnético y la segunda, las ondas de tipo eléctrico.

78. Sean Σ la superficie del tubo; S, su sección perpendicular; C, la frontera de S. Dirigimos el eje z paralelamente a la directriz del tubo. La dependencia del tiempo es $e^{-i\omega t}$.

Cualquier campo dentro del guíaondas se puede representar en forma de suma de los campos de tipos eléctrico ($H_z = 0$) y magnético ($E_z = 0$), cada uno de los cuales se determina por la componente z del correspondiente vector de Hertz (véase el problema 69).

Si $H_z = 0$, entonces, tomando $\Pi_z = \Pi$, obtenemos el problema para la función escalar

$$\Delta\Pi + k^2\Pi = 0 \quad \text{dentro de} \quad \Sigma\left(k = \frac{\omega}{c}\right),$$

$$\Pi = 0 \quad \text{sobre} \quad \Sigma.$$

Si $E_z = 0$, entonces $\Pi'_z = \Pi'$ y

$$\Delta\Pi' + k^2\Pi' = 0 \quad \text{dentro de} \quad \Sigma,$$

$$\frac{\partial\Pi'}{\partial\nu} = 0 \quad \text{sobre} \quad \Sigma.$$

Existen soluciones particulares de la forma

$$\Pi(M, z) = \psi_n(M)\,e^{i\gamma_n z}, \qquad \Pi'(M, z) = \hat{\psi}_n(M)\,e^{i\hat{\gamma}_n z},$$

donde $\gamma_n = \sqrt{k^2 - \lambda_n}$, $\hat{\gamma}_n = \sqrt{k^2 - \hat{\lambda}_n}$, λ_n y $\hat{\lambda}_n$ son los valores propios de los problemas de contorno

$$\Delta_2\psi_n + \lambda_n\psi_n = 0 \quad \text{dentro de} \quad S, \qquad \psi_n = 0 \quad \text{sobre} \quad C,$$

$$\Delta_2\hat{\psi}_n + \hat{\lambda}_n\hat{\psi}_n = 0 \quad \text{dentro de} \quad S, \qquad \frac{\partial\hat{\psi}_n}{\partial\nu} = 0 \quad \text{sobre} \quad C.$$

Si $\lambda_n \leqslant k^2$ para $n = 1, 2, \ldots, N$ y $\lambda_n > k^2$ para $n = N+1, N+2, \ldots$, entonces existen N ondas móviles, cada una de las cuales se propaga con la velocidad de fase

$$v_n = \frac{kc}{\gamma_n} = \frac{c}{\sqrt{1 - \frac{\lambda_n}{k^2}}}.$$

Si $\lambda_1 > k^2$, entonces en el tubo no pueden haber ondas móviles.

Si $\Pi(M, z) = A_n\psi_n(M)\,e^{-i\gamma_n z}$, entonces el flujo de energía a través de la sección transversal es igual a

$$Y_z = |A_n|^2\,\frac{ck}{8\pi}\,\gamma_n\lambda_n.$$

Con esto se supone que $\psi_n(M)$ están normadas a 1

$$\int\limits_S \psi_n^2\, dS = 1.$$

Indicación. Si introducir el sistema de coordenadas rectangulares, entonces

$$E_x = \frac{\partial^2 \Pi}{\partial x \partial z}, \qquad E_y = \frac{\partial^2 \Pi}{\partial y \partial_z}, \qquad E_z = \frac{\partial^2 \Pi}{\partial z^2} + k^2 \Pi,$$

$$H_x = -ik \frac{\partial \Pi}{\partial y}, \qquad H_y = ik \frac{\partial \Pi}{\partial x}, \qquad H_z = 0.$$

El problema obtenido para Π' es análogo al problema 42 sobre la propagación de las ondas acústicas dentro de un tubo cilíndrico con paredes rígidas (véase [7], pág. 528).

79. Las ondas móviles pueden existir cuando e cumplen las siguientes condiciones:

a) si $\lambda_{m,n} = [\mu_m^{(n)}]^2 < k^2$, entonces existen tantas ondas móviles como soluciones linealmente independientes de la ecuación de la onda para $\lambda_{m,n}$, que satisfacen a esta desigualdad; aquí $\mu_m^{(n)}$ es la raíz de la ecuación

$$\frac{J_n(\mu a)}{J_n(\mu b)} = \frac{N_n(\mu a)}{N_n(\mu b)};$$

en este caso pueden haber ondas de tipo eléctrico.

b) Para todos los valores propios $\hat{\lambda}_{m,n}$ para los cuales se cumple la desigualdad

$$\hat{\lambda}_{m,n} = [\hat{\mu}_m^{(n)}]^2 < k^2,$$

donde $\hat{\mu}_m^{(n)}$ es la raíz de la ecuación

$$J_n'(\mu a)\, N_n'(\mu b) - J_n'(\mu b)\, N_n'(\mu a) = 0,$$

existen ondas móviles de tipo magnético ($E_z = 0$).

Para la onda principal de tipo magnético ($n = 0$) tenemos:

$$\Pi_z = \Pi = A_m R_m(\rho)\, e^{i(\gamma_m z - \omega t)}, \qquad \gamma_m = k\sqrt{1 - \frac{\mu_m^2}{k^2}}$$

donde A_m es el coeficiente,

$$R_m(\rho) = J_0(\mu_m \rho)\, N_0(\mu_m a) - J_0(\mu_m a)\, N_0(\mu_m \rho),$$

μ_m es la raíz de número m de la ecuación

$$J_0(\mu a)\, N_0(\mu b) - J_0(\mu b)\, N_0(\mu a) = 0.$$

El flujo de energía a través de la sección transversal es igual a

$$Y_z = \frac{ck^2}{4\pi^3} \left| A_m \right|^2 \sqrt{1 - \frac{\mu_m^2}{k^2}}\, \frac{J_0^2(\mu_m a) - J_0^2(\mu_m b)}{J_0^2(\mu_m b)}$$

Las componentes del campo se dan por las fórmulas

$$E_z=\lambda_m \Pi, \quad E_\varphi=0, \quad E_\rho=i\gamma_m A_m R'_m(\rho)\, e^{i(\gamma_m z-\omega t)},$$
$$H_z=0, \quad H_\varphi=-A_m ik R'_m(\rho)\, e^{i(\gamma_m z-\omega t)}, \quad H\rho=0,$$

de modo que

$$H_\varphi=-\frac{k}{\gamma_m}E_\rho.$$

Indicación. Se deben utilizar los resultados del problema 78, suponiendo que la región S tiene forma de anillo con los radios a y b. Las funciones propias de la membrana en forma de anillo con las fronteras fijas y libres están dadas en la respuesta al problema 27.

80. Sea que el origen del sistema esférico de coordenadas (r, θ, φ) está en el centro del resonador esférico. La dependencia con respecto al tiempo es del tipo $e^{-i\omega t}$.

Las oscilaciones de tipo eléctrico se determinan por las fórmulas

$$E_r=\frac{\partial^2}{\partial r^2}(ru)+k^2(ru), \quad E_\theta=\frac{1}{r}\frac{\partial^2(ru)}{\partial r\,\partial\theta}, \quad E\varphi=\frac{1}{r\operatorname{sen}\varphi}\frac{\partial^2(ru)}{\partial r\,\partial\varphi},$$
$$H_r=0,\ H_\theta=\frac{-ik}{\operatorname{sen}\theta}\frac{\partial u}{\partial\varphi}, \quad H_\varphi=ik\frac{\partial u}{\partial\theta},$$

donde $u=u_{m,n}$ es la función propia del problema de contorno

$$\Delta u+k^2u=0, \quad u=0 \quad \text{para} \quad r=a,$$

se hallan por la fórmula

$$u_{m,n}(r, \theta, \varphi)=\psi_n(k_{m,n}r)\,Y_n^{(m)}(\theta, \varphi) \quad (n=1, 2, \ldots;\ m=0, \pm 1,$$
$$\pm 2, \ldots, \pm n),$$

donde $k_{m,n}=\frac{\omega_{m,n}}{c}$ es el número propio de onda que es la raíz de la ecuación

$$\frac{J_{n+\frac{1}{2}}(ka)}{J_{n-\frac{1}{2}}(ka)}=\frac{ka}{n+1}, \quad \psi_n(\rho)=\sqrt{\frac{\pi}{2\rho}}\,J_{n+\frac{1}{2}}(\rho),$$

$Y_n^{(m)}(\theta, \varphi)=P_n^{(m)}(\cos\theta)\begin{matrix}\cos\\ \operatorname{sen}\end{matrix} m\varphi$, la función esférica.

La frecuencia propia más baja corresponde a $n=0$; $u_{m,0}(r)=\psi_0(k_m r)$, además k_m se determina de la ecuación

$$\frac{J_{\frac{1}{2}}(ka)}{J_{-\frac{1}{2}}(ka)}=ka,$$

es decir,

$$\operatorname{tg}(ka)=ka.$$

Para las oscilaciones de tipo magnético ($E_r = 0$) tenemos:

$$E_r = 0, \qquad E_\theta = \frac{ik}{\operatorname{sen}\theta}\frac{\partial v}{\partial \varphi}, \qquad E_\varphi = -ik\frac{\partial v}{\partial \theta},$$

$$H_r = \frac{\partial^2 (rv)}{\partial r^2} + k^2 (rv), \qquad H_\theta = \frac{1}{r}\frac{\partial^2 (rv)}{\partial r\, \partial\theta}, \qquad H_\varphi = \frac{1}{r}\frac{\partial^2 (rv)}{\partial r\, \partial\varphi},$$

donde

$$v = v_{m,n} = \psi_n (k_{m,n} r)\, Y_n^{(m)} (\theta, \varphi),$$

además $k_{m,n}$ se determinan de la ecuación

$$J_{n+\frac{1}{2}} (ka) = 0.$$

Para $n = 0$ obtenemos:

$$v_{m,0} = \psi_0 (k_m r),$$

donde

$$k_m = \frac{\pi m}{a} \qquad \omega_1 = c\frac{\pi}{a}.$$

Indicación. Compárase con el problema 25 sobre las oscilaciones acústicas propias de la esfera.

81. Se examina el segmento del guíaondas cilíndrico de sección arbitraria acotado por dos planos $z = \pm l$ (es eje z es paralelo a la directriz del cilindro, véase el problema 78).

Las oscilaciones de tipo eléctrico ($H_z = 0$)

$$\Pi_z = \Pi_{m,n} = A_{m,n}\psi_n (M) \cos\frac{\pi m}{2l}(l - z),$$

donde $\psi_n (M)$ es la función propia del problema de contorno

$$\Delta_2\psi_n + \lambda_n\psi_n = 0 \quad \text{dentro de } S, \quad \psi_n = 0 \quad \text{sobre } C.$$

Las frecuencias propias son

$$\omega_{m,n} = c\sqrt{\lambda_n + \left(\frac{\pi m}{2l}\right)^2}.$$

Las oscilaciones de tipo magnético ($E_z = 0$)

$$\hat{\Pi}_z = \hat{\Pi}_{m,n} (M, z) = \hat{A}_{m,n}\hat{\psi}_n (M) \operatorname{sen}\frac{\pi m}{2l}(l - z),$$

donde $\hat{\psi}_n (M)$ es la función propia del problema de contorno

$$\Delta_2\hat{\psi}_n + \hat{\lambda}_n\hat{\psi}_n = 0 \quad \text{dentro de } S, \quad \frac{\partial\hat{\psi}_n}{\partial\nu} = 0 \quad \text{sobre } C.$$

Las frecuencias propias son

$$\hat{\omega}_{m,n} = c\sqrt{\lambda_n + \left(\frac{\pi m}{2l}\right)^2}.$$

La energía eléctrica media por el período en la onda estacionaria es igual al valor medio por el período de la onda magnética

$$\overline{\mathscr{E}}_{\text{el.}} = \mathscr{E}_{\text{magn.}} = \frac{1}{16\pi}\, ck^2\lambda_n |A_n|^2.$$

La energía total en la onda estacionaria no varía en el tiempo y es igual a

$$\mathscr{E}=\frac{1}{8\pi}ck^2\lambda_n|A_n|^2.$$

Para el resonador con sección circular o rectangular, las fórmulas para Π siguen siendo validas; allí se debe sólo sustituir la expresión concreta para la función propia

a) para la sección rectangular con los lados a y b:

$$\psi_n(M)=\psi_{n,m}(x, y)=\sqrt{\frac{4}{ab}}\operatorname{sen}\frac{\pi m}{a}x\operatorname{sen}\frac{\pi n}{b}y,$$

$$\hat{\psi}_n(M)=\hat{\psi}_{n,m}(x, y)=\sqrt{\frac{\varepsilon_m\varepsilon_n}{ab}}\cos\frac{\pi m}{a}x\cos\frac{\pi n}{b}y,\quad \varepsilon_k=2,\quad k\neq 0,\quad \varepsilon_0=1;$$

b) para la sección circular de radio a tenemos:

$$\psi_{n,m}(r, \varphi)=\sqrt{\frac{\varepsilon_n}{\pi a^2}}\frac{J_n\left(\frac{\mu_m^{(n)}}{a}r\right)}{J_n'(\mu_m^{(n)})}\begin{matrix}\cos\\ \operatorname{sen}\end{matrix}n\varphi,$$

$$\hat{\psi}_{n,m}(r, \varphi)=\sqrt{\frac{\varepsilon_n}{\pi a^2}}\frac{\hat{\mu}_m^{(n)}}{\sqrt{[\hat{\mu}_m^{(n)}]^2-n^2}}\,\frac{J_n\left(\frac{\hat{\mu}_m^{(n)}}{a}r\right)}{J_n(\mu_m^{(n)})}\begin{matrix}\cos\\ \operatorname{sen}\end{matrix}n\varphi,$$

donde $\mu_m^{(n)}$ es la raíz de la ecuación $J_n(\mu)=0$, $\lambda_{mn}=\frac{[\mu_m^{(n)}]^2}{a^2}$, $\hat{\mu}_m^{(n)}$, la raíz de la ecuación $J_n'(\mu)=0$.

Las funciones $\psi_{m,n}$ y $\hat{\psi}_{m,n}$ dadas más arriba están normadas a 1.

Indicación. Las funciones Π y $\hat{\Pi}$ satisfacen la ecuación de onda $\Delta u+k^2u=0$ y las siguientes condiciones de frontera:

$$\Pi=0\quad\text{sobre}\quad\Sigma;\quad\frac{\partial\Pi}{\partial z}=0\quad\text{para}\quad z=\pm l,$$

$$\frac{\partial\hat{\Pi}}{\partial\nu}=0\quad\text{sobre}\quad\Sigma;\qquad\hat{\Pi}=0\quad\text{para}\quad z=\pm l.$$

Para calcular la energía en todo el volumen se debe utilizar la fórmula de Green (véase [7], págs. 538-542).

82. Sea que el toroide está acotado por las superficies $\rho=a$ y $\rho=b$ y los planos $z=-l$ y $z=l$. Se le puede interpretar como el «segmento» de un coaxial de longitud $2l$, examinado en el problema 79. Para los potenciales polarizados Π y $\hat{\Pi}$ son validas las fórmulas obtenidas al resolver el problema 81 y para las funciones propias de la sección transversal ψ_n y $\hat{\psi}_n$ se deben tomar las expresiones dadas en la respuesta al problema 79

$$\psi_{m,n}(\rho, \varphi)=R_{m,n}(\rho)\begin{matrix}\cos n\varphi\\ \operatorname{sen} n\varphi\end{matrix},\quad \hat{\psi}_{m,n}(\rho, \varphi)=\hat{R}_{m,n}(\rho)\begin{matrix}\cos n\varphi\\ \operatorname{sen} n\varphi\end{matrix},$$

donde

$$R_{m,n}(\rho)=J_n(\mu_m^{(n)}\rho)\,N_n(\mu_m^{(n)}a)-J_n(\mu_m^{(n)}a)\,N_n(\mu_m^{(n)}\rho),$$

$$\hat{R}_{m,n}(\rho)=J_n(\hat{\mu}_m^{(n)}\rho)\,N'_n(\hat{\mu}_m^{(n)}a)-J'_n(\hat{\mu}_m^{(n)}a)\,N_n(\hat{\mu}_m^{(n)}\rho),$$

$\mu_m^{(n)}$ y $\hat{\mu}_m^{(n)}$ se determinan respectivamente de las ecuaciones

$$R_{m,n}(b)=0,\quad R'_{m,n}(b)=0.$$

Las frecuencias propias son iguales a

$$\omega_{m,n}=c\sqrt{[\mu_m^{(n)}]^2+\left(\frac{\pi m}{2l}\right)^2},\quad \omega_{m,n}=c\sqrt{[\hat{\mu}_m^{(n)}]^2+\left(\frac{\pi m}{2l}\right)^2}.$$

Indicación. Véase el problema 81.

83. *Difracción sobre el cilindro.* El eje del cilindro está dirigido según el eje z; la onda plana se propaga a lo largo del eje x, el vector de la intensidad del campo magnético en la onda incidente está dirigido paralelamente al eje del cable. Designamos con ε_1, μ_1, σ_1 los parámetros del cable; $\varepsilon_2=1$, $\mu_2=1$, $\sigma_2=0$, los parámetros del medio; k_1 y k_2, los respectivos números de onda, además,

$$k^2=\frac{\varepsilon\mu\omega^2+i4\pi\sigma\mu\omega}{c^2}.$$

La dependencia con respecto al tiempo es del tipo $e^{-i\omega t}$.
Sólo la componente z del vector E es diferente de cero

$$E=(0,\ 0,\ E),$$

mediante ella se expresan H_ρ y H_φ:

$$H_\rho=-\frac{ic}{\mu\omega}\frac{1}{\rho}\frac{\partial E}{\partial\varphi},\quad H_\varphi=\frac{ic}{\mu\omega}\frac{\partial E}{\partial\rho},\quad H_z=0.$$

Para $E=E(\rho,\varphi)$ obtenemos:

$$E=\begin{cases} e^{ik_2x}+\sum\limits_{m=-\infty}^{\infty}a_m H_m^{(1)}(k_2\rho)\,e^{im\varphi} & \text{para}\quad \rho>a,\\ \sum\limits_{m=-\infty}^{\infty}b_m J_m(k_1\rho)\,e^{im\varphi} & \text{para}\quad \rho<a,\end{cases}\qquad(1)$$

donde a es el radio del cable,

$$a_m=-i^m\frac{\frac{k_1}{\mu_1}J'_m(k_1a)\,J_m(k_2a)-k_2J_m(k_1a)\,J'_m(k_2a)}{\frac{k_1}{\mu_1}J'_m(k_1a)\,H_m^{(1)}(k_2a)-k_2H_m^{(1)\prime}(k_2a)\,J_m(k_1a)},$$

$$b_m=i^m\frac{J_m(k_2a)}{J_m(k_1a)}+\frac{H_m^{(1)}(k_2a)}{J_m(k_1a)}a_m.$$

Si el cable es un conductor ideal, entonces

$$a_m = -i^m \frac{J_m(k_2 a)}{H_m^{(1)}(k_2 a)}, \qquad b_m = 0.$$

Indicación. Se requiere hallar la solución de la ecuación

$$\Delta E^{(1)} + k_1^2 E^{(1)} = 0 \quad \text{para} \quad r < a,$$

$$\Delta E^{(2)} + k_2^2 E^{(2)} = 0 \quad \text{para} \quad r > a,$$

además

$$E^{(2)} = E_0 + u = e^{ik_2 x} + u,$$

que satisface sobre la superficie del cable $\rho = a$ las condiciones de continuidad de E_z y H_φ, lo que da:

$$E^{(1)} = E^{(2)}, \quad \frac{1}{\mu_1} \frac{\partial E^{(1)}}{\partial \rho} = \frac{\partial E^{(2)}}{\partial \rho} \quad \text{para} \quad \rho = a.$$

Además de eso la función u debe satisfacer en el infinito la condición de radiación

$$\lim_{\rho \to \infty} \sqrt{\rho} \left(\frac{\partial u}{\partial \rho} - ik_2 u \right) = 0.$$

La solución se busca en la forma (1). Los coeficientes a_m y b_m se calculan de la condición para $\rho = a$, además debe utilizarse el desarrollo de $e^{ik_2 x}$ en serie:

$$e^{ik_2 x} = e^{ik_2 \rho \cos \varphi} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} i^m J_m(k_2 \rho) e^{im\varphi}.$$

Si el cable es un conductor ideal, entonces $k_1 = \infty$ y las condiciones de frontera se reducen a una:

$$E^{(2)} = e^{ik_2 a \cos \varphi} + u = 0 \quad \text{para} \quad \rho = a.$$

Por eso para a_m se obtiene la expresión

$$a_m = -i^m \frac{J_m(k_2 a)}{H_m^{(1)}(k_2 a)}.$$

84. *Difracción sobre la esfera idealmente conductora.* La onda plana se propaga en la dirección del eje polar z del sistema de coordenadas esféricas r, θ, φ; el campo eléctrico está polarizado en la dirección del eje x, y el campo magnético, en la dirección del eje y:

$$E_x^0 = H_y^0 = e^{ikz} = e^{ikr\cos\theta} = \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1)\, i^n \psi_n(kr)\, P_n(\cos\theta),$$

$$E_r = \frac{\partial^2 U}{\partial r^2} + k^2 U, \qquad E_\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial^2 U}{\partial r\, \partial \theta}, \qquad E_\varphi = -\frac{ik}{r} \frac{\partial U'}{\partial \theta}, \tag{1}$$

$$H_r = \frac{\partial^2 U'}{\partial r^2} + k^2 U', \qquad H_\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial^2 U'}{\partial r\, \partial \theta}, \qquad H_\varphi = \frac{ik}{r} \frac{\partial U}{\partial \theta}, \tag{2}$$

donde

$$U = ru, \qquad U' = rv.$$

Las funciones $u = \frac{U}{r}$ y $v = \frac{U'}{r}$ se hallan de las ecuaciones de onda $\Delta u + k^2 u = 0$ y $\Delta v + k^2 v = 0$, y las condiciones de frontera

$$\frac{\partial}{\partial r}(ru) = 0, \quad v = 0 \quad \text{para} \quad r = a,$$

que son las consecuencias de las igualdades

$$E_\theta = \frac{1}{r}\frac{\partial^2 (ru)}{\partial r\,\partial\theta} = 0, \quad E_\varphi = -\frac{ik}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}(rv) = 0 \quad \text{para} \quad r = a.$$

Para resolver el problema, ante todo se deben hallar los potenciales u^0 y v^0 para la onda incidente. Dado que el campo electromagnético es determinado completamente por las magnitudes E_r y H_r, entonces calculamos:

$$E_r^0 = \frac{\partial x}{\partial r} E_x^0 = \operatorname{sen}\theta\cos\varphi\, e^{ikr\cos\theta} = \frac{-\cos\varphi}{ikr}\frac{\partial}{\partial\theta} e^{ikr\cos\theta} = \sum_{n=0}^{\infty}(2n+1)\, i^n \frac{\psi_n(kr)}{ikr} P_n^{(1)}(\cos\theta)\cos\varphi,$$

$$H_r^0 = \frac{\partial y}{\partial r} H_y^0 = \operatorname{sen}\theta\ \operatorname{sen}\varphi\, e^{ikr\cos\theta} = \frac{-\operatorname{sen}\varphi}{ikr}\frac{\partial}{\partial\theta} e^{ikr\cos\theta} = \sum_{n=0}^{\infty}(2n+1)\, i^n \frac{\psi_n(kr)}{ikr} P_n^{(1)}(\cos\theta)\ \operatorname{sen}\varphi,$$

donde

$$P_n^{(1)}(\cos\theta) = -\frac{d}{d\theta} P_n(\cos\theta).$$

Por otra parte,

$$E_r^{(0)} = \frac{\partial^2 (ru^0)}{\partial r^2} + k^2(ru^0), \quad H_r^0 = \frac{\partial^2 (rv^0)}{\partial r^2} + k^2(rv^0)$$

Haciendo

$$u^0 = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \psi_n(kr) P_n^{(1)}(\cos\theta)\cos\varphi,$$

$$v^0 = \sum_{n=0}^{\infty} b_n \psi_n(kr) P_n^{(1)}(\cos\theta)\operatorname{sen}\varphi,$$

comparando ambas expresiones para E_r^0 y H_r^0 y teniendo en cuenta la ecuación

$$\frac{d^2}{dr^2}(r\psi_n) + k^2 r\psi_n = \frac{n(n+1)\psi_n}{r},$$

obtenemos

$$a_n = b_n = \frac{2n+1}{n(n+1)}\frac{i^{n-1}}{k}.$$

Ahora buscamos la solución del problema en la forma

$$u(r, \theta, \varphi)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n [\psi_n(kr)+\alpha_n\zeta_n^{(1)}(kr)]\ P_n^{(1)}(\cos\theta)\cos\varphi,$$

$$v(r, \theta, \varphi)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n [\psi_n(kr)+\beta_n\zeta_n^{(1)}(kr)]\ P_n^{(1)}(\cos\theta)\operatorname{sen}\varphi.$$

Las condiciones de frontera para $r=a$ permiten determinar α_n y β_n:

$$\alpha_n=-\frac{\Psi_n(ka)}{Z_n^{(1)}(ka)},\quad \Psi_n(x)=\frac{d}{dx}[x\psi_n(x)],\quad \psi_n'(x)=\sqrt{\frac{\pi}{2x}}\,J_{n+\frac{1}{2}}(x).$$

$$\beta_n=-\frac{\psi_n(ka)}{\zeta_n^{(1)}(ka)},\quad Z_n^{(1)}(x)=\frac{d}{dx}[x\zeta_n^{(1)}(x)],\quad \zeta_n^{(1)}(x)=\sqrt{\frac{\pi}{2x}}\,H^{(1)}_{n+\frac{1}{2}}(x).$$

85. *Difracción sobre la esfera conductora.* Si el sistema de coordenadas y la onda incidente están elegidos lo mismo que en el problema anterior, entonces los potenciales incógnitos de Borguins*) $U = ru$ y $U' = rv$ serán determinados por las expresiones

$$u=\begin{cases}\sum_{n=0}^{\infty} a_n [\psi_n(k_1r)+\alpha_n\zeta_n^{(1)}(k_1r)]\ P_n^{(1)}(\cos\theta)\cos\varphi & \text{para}\quad r>a \text{ (el aire)},\\ \sum_{n=0}^{\infty} A_n\psi_n(k_2r)\ P_n^{(1)}(\cos\theta)\cos\varphi & \text{para}\quad r<a,\end{cases}$$

$$v=\begin{cases}\sum_{n=0}^{\infty} a_n [\psi_n(k_1r)+\beta_n\zeta_n^{(1)}(k_1r)]\ P_n^{(1)}(\cos\theta)\operatorname{sen}\varphi & \text{para}\quad r>a,\\ \sum_{n=0}^{\infty} B_n\psi_n(k_2r)\ P_n^{(1)}(\cos\theta)\operatorname{sen}\varphi & \text{para}\quad r<a,\end{cases}$$

donde

$$\alpha_n=\frac{\frac{k_1^2}{\mu_1}\psi_n(k_1a)\,\Psi_n(k_2a)-\frac{k_2^2}{\mu_2}\psi_n(k_2a)\,\Psi_n(k_1a)}{\Delta},$$

$$A_n=\frac{k_1^2[\Psi_n(k_1a)\,Z_n^{(1)}(k_1a)-\psi_n(k_1a)\,\zeta_n^{(1)}(k_1a)]}{\mu_1\Delta}a_n,$$

$$\Delta=\frac{k_2^2}{\mu_2}Z_n^{(1)}(k_1a)\,\psi_n(k_2a)-\frac{k_1^2}{\mu_1}\Psi_n(k_2a)\,\zeta_n^{(1)}(k_1a),$$

análogamente se escriben las expresiones para B_n y β_n; k_2 es el número de onda de la esfera; k_1, el número de onda del medio.

---

*) Véase el problema 70.

Las componentes de los campos eléctrico y magnético se calculan por las fórmulas (1) y (2) del problema 84. Son excepciones las expresiones para E_φ y H_φ:

$$E_\varphi = -\frac{i\omega\mu}{er}\frac{\partial U'}{\partial\theta},$$

$$H_\varphi = \frac{ik^2c}{\omega\mu r}\frac{U}{\partial\theta}.$$

Indicación. Se deben utilizar las expresiones, obtenidas en la solución del problema anterior, para los potenciales u^0 y v^0 de la onda incidente. Las condiciones de frontera sobre la superficie de la esfera son de la forma

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial r}(ru_2) = \frac{\partial}{\partial r}(ru_1), \quad \frac{k_1^2 u_1}{\mu_1} = \frac{k_2^2 u_2}{\mu_2}, \\ &\frac{\partial}{\partial r}(rv_2) = \frac{\partial}{\partial r}(rv_1), \quad \mu_1 v_1 = \mu_2 v_2 \end{aligned}\right\} \quad \text{para} \quad r = a.$$

3. Radiación de las ondas electromagnéticas

86. *Dipolo eléctrico en el espacio no acotado*. Sea $p = p_0 e^{-i\omega t}$ el momento del dipolo. Elegiremos el sistema de coordenadas esféricas r, θ, φ; en el origen de las coordenadas colocamos el dipolo y el eje z lo dirigimos a lo largo del vector p_0; entonces se puede escribir:

$$E_r = 2\cos\theta\left(\frac{1}{r^2} - \frac{ik}{r}\right)\Pi_0,$$

$$E_\theta = \operatorname{sen}\theta\left(\frac{1}{r^2} - \frac{ik}{r} - k^2\right)\Pi_0,$$

$$H_\varphi = ik\operatorname{sen}\theta\left(ik - \frac{1}{r}\right)\Pi_0,$$

$$E_\varphi = H_r = H_\theta = 0.$$

Aquí Π_0 es la componente del vector de Hertz dirigido a lo largo del eje z,

$$\Pi_0 = p_0\frac{e^{ikr}}{r}e^{-i\omega t}.$$

En la zona de la onda ($kr \gg 1$) con exactitud hasta los términos de orden de $\frac{1}{r^2}$ y de mayor orden de pequeñez

$$E_r = 0, \quad E_\theta = H_\varphi = -k^2\operatorname{sen}\theta\Pi_0.$$

La energía media durante el período es

$$\widetilde{Y} = 2\pi r^2\int_0^\pi \frac{c}{4\pi}\frac{1}{2}E_\theta H_\varphi\operatorname{sen}\theta\,d\theta = \frac{p_0^2 k^4 c}{3}.$$

Indicación. Véase [7], pág. 451.

87. *Indicación*. Sea que el dipolo está colocado en el origen del sistema de coordenadas esféricas r, θ, φ, y su momento p_0 está dirigido a lo largo del eje

z ($\theta = 0$). Entonces

$$\left.\begin{array}{lll} E_r = \dfrac{\partial^2}{\partial r^2}(ru) + k^2(ru), & E_\theta = \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial^2}{\partial r\,\partial\theta}(ru), & E_\varphi = \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial^2}{\partial r\,\partial\varphi}(ru) = 0, \\ H_r = 0, & H_\theta = 0, & H_\varphi = ik\dfrac{\partial u}{\partial\theta}, \end{array}\right\} \quad (1)$$

donde $u = \dfrac{U}{r}$ es la solución de la ecuación

$$\Delta u + k^2 u = 0,$$

además

$$\lim_{r\to\infty} r\left(\frac{\partial u}{\partial r} - iku\right) = 0 \quad \text{(la condición de radiación).}$$

La condición de exitación se puede tomar en la forma

$$H_\varphi \approx -p_0\frac{ik \operatorname{sen}\theta}{r^2} \quad \text{para } r \text{ pequeños}$$

ó

$$H_\varphi = -p_0 k^2 \frac{\operatorname{sen}\theta}{r} e^{ikr} \quad \text{para } r \text{ grandes.}$$

Esto da:

$$u = A\zeta_1^{(1)}(kr)\cos\theta, \quad \zeta_1^{(1)}(kr) = \frac{i}{k^2}\frac{e^{ikr}}{r}\left(ik - \frac{1}{r}\right)$$

donde

$$A = ik^2 p_0.$$

De aquí se deducen las fórmulas del problema 86 para las componentes del campo E_r, E_θ, H_φ.

88. Sea que el dipolo con el momento $p = p_0 e^{-i\omega t}$ está dirigido a lo largo del eje z del sistema de coordenadas r, θ, φ, cuyo origen está colocado en el centro de la esfera de radio a.

La función $u = u(r, \theta)$ se determina por la fórmula

$$u(r, \theta) = [A\,\zeta_1(kr) + B\psi_1(kr)]\,P_1(\cos\theta),$$

donde

$$A = ik^2 p_0, \qquad \psi_n = \sqrt{\frac{\pi}{2x}}\,J_{n+\frac{1}{2}}(x),$$

$$B = -\frac{Z_1^{(1)}(ka)}{\Psi_1(ka)} = -\frac{ka\zeta_1^{(1)\prime}(ka) + \zeta_1^{(1)}(ka)}{ka\psi_1'(ka) + \psi_1(ka)}, \qquad \zeta_n^{(1)}(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2x}}\,H^{(1)}_{n+\frac{1}{2}}(x).$$

Las componentes del campo se calculan por las fórmulas (1) del problema 87.

Indicación. El problema difiere del anterior en que en vez de la condición de radiación en el infinito aquí aparece la condición de frontera $E_\theta = 0$ ó $\dfrac{\partial}{\partial r}(ru) = 0$ sobre la superficie de la esfera $r = a$. Por eso en la solución deben

contenerse dos funciones cilíndricas linealmente independientes, por ejemplo,

$$H^{(1)}_{n+\frac{1}{2}} \text{ y } H^{(2)}_{n+\frac{1}{2}}, \; N_{n+\frac{1}{2}} \text{ y } J_{n+\frac{1}{2}}, \; H^{(1)}_{n+\frac{1}{2}} \text{ y } J_{n+\frac{1}{2}}, \text{ etc.}$$

Elegimos las funciones $J_{n+\frac{1}{2}}$ y $H^{(1)}_{n+\frac{1}{2}}$. La constante A es la misma que en el problema anterior, la constante B se elige de la condición para $r = a$.

89. Si elegimos el sistema de coordenadas esféricas r, θ, φ, con origen en el centro de la esfera y el eje polar $\theta = 0$ dirigido a lo largo del dipolo, entonces se puede escribir:

$$E_r = \frac{\partial^2}{\partial r^2}(ru) + k^2(ru), \qquad E_\theta = \frac{1}{r}\frac{\partial^2(ru)}{\partial r\,\partial\theta}, \qquad E_\varphi = 0,$$

$$H_r = 0, \qquad H_\theta = 0, \qquad H_\varphi = \frac{ick^2}{\mu\omega}\frac{\partial u}{\partial\theta},$$

además,

$$k^2 = \begin{cases} k_1^2 = \dfrac{\varepsilon_1\mu_1\omega^2 + i4\pi\mu_1\sigma_1\omega}{c^2} & \text{para} \quad r > a, \\ k_2^2 = \dfrac{\varepsilon_2\mu_2\omega^2 + i4\mu_2\sigma_2\omega}{c^2} & \text{para} \quad r < a. \end{cases}$$

La función

$$u = \begin{cases} u_1 & \text{para} \quad r > a, \\ u_2 & \text{para} \quad r < a \end{cases}$$

se determina por las fórmulas

$$u_1 = C\zeta_1^{(1)}(k_1 r)\cos\theta,$$

$$u_2 = ip_0 k_2^2 [\zeta_1^{(1)}(k_2 r) + B\psi_1(k_2 r)]\cos\theta,$$

donde

$$B = \frac{\zeta_1^{(1)}(ak_2)\,Z_1^{(1)}(ak_1) - \dfrac{k_1^2\mu_2^2}{k_2^2\mu_1}\zeta_1^{(1)}(ak_1)\,Z_1^{(1)}(ak_2)}{\dfrac{k_1^2\mu_2}{k_2^2\mu_1}\zeta_1^{(1)}(ak_1)\,\Psi_1(ak_2) - \psi_1(ak_2)\,Z_1^{(1)}(ak_1)},$$

$$C = \frac{\zeta_1^{(1)}(ak_2)\,\Psi_1(ak_2) - \psi_1(ak_2)\,Z_1^{(1)}(ak_2)}{\dfrac{k_1^2\mu_2}{k_2^2\mu_1}\zeta_1^{(1)}(ak_1)\,\Psi_1(ak_2) - \psi(ak_2)Z_1^{(1)}(ak_1)}\,p_0 k_2^2,$$

$$\Psi_1(x) = \frac{d}{dx}[x\psi_1(x)], \qquad Z_1^{(1)}(x) = \frac{d}{dx}[x\zeta_1^{(1)}(x)].$$

Para $\sigma_1 \to \infty$ $C \to 0$, $B \to -\dfrac{Z_1^{(1)}(ak_2)}{\Psi_1(ak_2)}$, es decir, llegamos a la solución del problema 88.

Para $a \to \infty$ $C \to 0$, $B \to 0$, y nosotros obtenemos la solución del problema 86 sobre el dipolo en el espacio no acotado.

90. Introducimos el sistema de coordenadas esféricas r, θ, φ, con origen en el centro de la esfera y el eje polar dirigido a lo largo del dipolo. Al igual que en

el problema anterior

$$E_\varphi = H_r = H_\theta = 0, \qquad E_r = \frac{\partial^2}{\partial r^2}(ru) + k^2(ru), \qquad E_\theta = \frac{1}{r}\,\frac{\partial^2 (ru)}{\partial r\,\partial\theta},$$

$$H_\varphi = \frac{ick^2}{\mu\omega}\,\frac{\partial u}{\partial \theta}$$

donde

$$u = \begin{cases} u_1 & \text{para} \quad r < a, \\ u_2 & \text{para} \quad a < r < b, \\ u_3 & \text{para} \quad r > b \end{cases}$$

se determina por las expresiones

$$u_1 = ip_0k_0^2\,[\zeta_1^{(1)}(k_0r) + A\psi_1(k_0r)]\cos\theta,$$
$$u_2 = [B\psi_1(kr) + C\zeta_1^{(1)}(kr)]\cos\theta,$$
$$u_3 = D\zeta_1^{(1)}(k_0r)\cos\theta.$$

Los coeficientes A, B, C, D, se hallan de la solución del sistema de ecuaciones siguientes:

$$ip_0k_0^2\,[\zeta_1^{(1)}(ak_0) + A\psi_1(ak_0)] = \frac{k^2}{k_0^2\mu}\,[B\psi_1(ak) + C\zeta_1^{(1)}(ak)],$$

$$D\zeta_1^{(1)}(k_0b) = \frac{k^2}{k_0^2\mu}\,[B\psi_1(kb) + C\zeta_1^{(1)}(kb)],$$

$$ip_0k^2\,[Z_1^{(1)}(k_0a) + A\Psi_1(k_0a)] = B\Psi_1(ka) + CZ_1^{(1)}(ka),$$

$$DZ_1^{(1)}(k_0b) = B\Psi_1(kb) + CZ_1^{(1)}(kb).$$

Aquí se adoptan las designaciones

$$\Psi_1(x) = [x\psi_1(x)]', \qquad Z_1^{(1)}(x) = [x\zeta_1^{(1)}(x)]'.$$

Indicación. Los potenciales u_1, u_2, u_3 satisfacen las ecuaciones

$$\Delta u_s + k_s^2u_s = 0 \quad (s = 1,\ 2,\ 3), \quad k_1 = k_3 = k_0, \quad k_2 = k,$$

y las condiciones de frontera

$$\left.\begin{aligned} k_0^2u_1 &= \frac{k^2}{\mu}\,u_2, \\ \frac{\partial}{\partial r}(u_1r) &= \frac{\partial}{\partial r}(u_2r) \end{aligned}\right\} \text{ para } r = a, \qquad \left.\begin{aligned} \frac{k^2}{\mu}\,u_2 &= k_0^2u_3, \\ \frac{\partial}{\partial r}(ru_2) &= \frac{\partial}{\partial r}(ru_3) \end{aligned}\right\} \text{ para } r = b.$$

Sobre la elección de las expresiones para u_1, u_2, u_3 véanse los problemas anteriores.

91. *Resolución.* Introducimos el sistema de coordenadas esféricas r', θ, φ, con origen en el centro de la esfera, el dipolo está en el punto $r = r'$, $\theta = 0$. El campo no depende del ángulo φ y se determina por el potencial escalar $u(r, \theta)$:

$$E_r = \frac{\partial^2}{\partial r^2}(ru) + k^2(ru), \qquad E_\theta = \frac{1}{r}\,\frac{\partial^2(ru)}{\partial r\,\partial\theta}, \qquad E_\varphi = 0,$$

$$H_r = 0, \qquad H_\theta = 0, \qquad H_\varphi = \frac{ick^2}{\mu\omega}\,\frac{\partial u}{\partial\theta}$$

La función

$$u=\begin{cases} u_1 & \text{para} \quad r<a, \\ u_2 & \text{para} \quad r>a \end{cases}$$

satisface la ecuación de onda $\Delta u+k^2u=0$, donde

$$k^2=\begin{cases} k_0^2=\dfrac{\omega^2}{c^2} & \text{para} \quad r<a, \\ \dfrac{\varepsilon\mu\omega^2+i\,4\pi\sigma\mu\omega}{c^2} & \text{para} \quad r>a. \end{cases}$$

En la superficie de la esfera $r = a$ las componentes tangenciales del vector E y del vector H deben ser contínuas, es decir, E_θ y H_φ:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial r\,\partial\theta}(ru_1)&=\frac{\partial^2}{\partial r\,\partial\theta}(ru_2), \\ k_0^2\frac{\partial u_1}{\partial\theta}&=\frac{k^2}{\mu}\frac{\partial u_2}{\partial\theta} \end{aligned}\right\} \quad \text{para} \quad r=a.$$

Estas condiciones serán cumplidas si exigimos que sean continuas $\frac{\partial}{\partial r}(ru)$ y $\frac{k^2}{\mu}u$:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial r}(ru_1)&=\frac{\partial}{\partial r}(ru_2) \\ k_0^2u_1&=\frac{k^2}{\mu}u_2 \end{aligned}\right\} \quad \text{para} \quad r=a.$$

La función ru_1, obviamente, tiene en el manantial una singularidad de tipo $\frac{e^{ik_0R}}{R}$, donde $R=\sqrt{r'^2+r^2-2rr'\cos\theta}$ ((r, θ, φ) es el punto de observación), es decir, $u_1\sim\frac{1}{r'}\frac{e^{ik_0R}}{R}$.

Tomando $u_1=\bar{u}_0+v_0$, donde $\bar{u}_0=\frac{\alpha}{r'}u_0=\frac{\alpha}{r'}\frac{e^{ik_0R}}{ik_0R}$ (α es un multiplicador de normación que será determinado más abajo) obtenemos para v_1 y u_2:

$$\Delta v_1+k_0^2v_1=0 \quad \text{para} \quad r<a, \qquad \Delta u_2+k^2u_2=0 \quad \text{para} \quad r>a,$$

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial r}(rv_1)-\frac{\partial}{\partial r}(ru_2)&=-\frac{\partial}{\partial r}(r\bar{u}_0), \\ k_0^2(v_1+\bar{u}_0)&=\frac{k^2}{\mu}u_2 \end{aligned}\right\} \quad \text{para} \quad r=a, \tag{1}$$

$$\lim_{r\to\infty}\left(\frac{\partial u_2}{\partial r}-iku_2\right)=0.$$

Las soluciones particulares son de la forma

$$v_{1n} = [A_n\psi_n(k_0r) + A'_n\zeta_n^{(1)}(k_0r)]\, P_n(\cos\theta),$$
$$u_{2n} = [B_n\zeta_n^{(1)}(kr) + B'_n\psi_n(kr)]\, P_n(\cos\theta).$$

En virtud de la acotación de la función u_1 para $r = 0$, el coeficiente $A'_n = 0$; de la condición de radiación para $r \to \infty$ se deduce que $B'_n = 0$. Por eso

$$\left.\begin{aligned} v_1(r, \theta) &= \sum_{n=0}^{\infty} A_n\psi_n(k_0r)\, P_n(\cos\theta),\\ u_2(r, \theta) &= \sum_{n=0}^{\infty} B_n\zeta_n^{(1)}(kr)\, P_n(\cos\theta). \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

Para determinar los coeficientes A_n y B_n de las condiciones de frontera para $r = a$ utilizamos el desarrollo de la solución fundamental u_0 en la serie con respecto a los polinomios de Legendre:

$$u_0 = \frac{e^{ik_0R}}{ik_0R} = \left\{\begin{aligned} &\sum_{n=0}^{\infty} a_n\zeta_n^{(1)}(k_0r)\, P_n(\cos\theta) \quad \text{para} \quad r > r',\\ &\sum_{n=0}^{\infty} b_n\psi_n(k_0r)\, P_n(\cos\theta) \quad \text{para} \quad r < r', \end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

$$a_n\ (2n+1)\,\psi_n(k_0r'), \qquad b_n = (2n+1)\,\zeta_n^{(1)}(k_0r').$$

Para $r' \to 0$ debe cumplirse la condición

$$\overline{u_0} \to u = ip_0k_0^2\zeta_1^{(1)}(k_0r)\, P_1(\cos\theta) \qquad (p_0 \text{ es el momento del dipolo}).$$

Teniendo en cuenta que el primer sumando para $n = 0$ en (3) se debe omitir, dado que para el $H_\varphi = E_r = E_\theta = 0$ y observando que

$$\lim_{r'\to 0} \frac{a_n}{r'} = \begin{cases} 0 & \text{para} \quad n > 1,\\ -0{,}5\ k_0 & \text{para} \quad n = 1, \end{cases}$$

hallamos $\alpha = 2\ ip_0k_0$. Sustituyendo en la condición (1) para $r = a$ las expresiones (2) y (3) (para $r = a > r'$), obtenemos

$$\beta a_n Z_n^{(1)}(k_0a) + A_n\Psi_n(k_0a) = B_n Z_n^{(1)}(ka),$$

$$k_0^2\,[a_n\beta\zeta_n^{(1)}(k_0a) + A_n\psi_n(k_0a)] = \frac{k^2}{\mu} B_n\zeta_n^{(1)}(ka),$$

$$Z_n^{(1)}(\rho) = [\rho\zeta_n^{(1)}(\rho)]', \qquad \Psi_n(\rho) = [\rho\psi_n(\rho)]', \qquad \beta = \frac{\alpha}{r'} = \frac{2ip_0k_0}{r'}.$$

De aquí hallamos

$$A_n = \left[\frac{k^2}{k_0^2\mu} Z_n^{(1)}(k_0a)\,\zeta_n^{(1)}(ka) - \zeta_n^{(1)}(k_0a)\, Z_n^{(1)}(ka)\right] \frac{\beta a_n}{\Delta},$$

$$B_n = [\psi_n(k_0a)\, Z_n^{(1)}(k_0a) - \zeta_n^{(1)}(k_0a)\,\Psi_n(k_0a)]\, \frac{\beta a_n}{\Delta},$$

$$\Delta = \psi_n(k_0a)\, Z_n^{(1)}(ka) - \frac{k^2}{k_0^2\mu}\,\zeta_n^{(1)}(ka)\,\Psi_n(k_0a).$$

Si $\sigma \to \infty$ ($k \to \infty$), entonces $B_n = 0$,

$$A_n = -\frac{Z_n^{(1)}(k_0 a)}{\Psi_n(k_0 a)} \beta a_n$$

y llegamos a la solución del problema sobre el dipolo colocado en el punto (r', θ, φ) dentro de la esfera idealmente conductora.

92. *Antena eléctrica vertical sobre la tierra esférica*. La antena (el dipolo puntiforme) está ubicado en el punto $r' = a + h$ ($h > 0$), $\theta = 0$ y orientada a lo largo del eje $\theta = 0$. El momento del dipolo es igual a $p = p_0 e^{-i\omega t}$. El multiplicador que depende del tiempo $e^{-i\omega t}$ lo omitimos en todos lados.

Para el potencial $u = \dfrac{U}{r}$ tenemos:

dentro de la tierra ($r < a$)

$$u_1 = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \psi_n(kr), \ P_n(\cos\theta),$$

fuera de la tierra ($r > a$)

$$u_2 = \beta \frac{e^{ik_0 R}}{ik_0 R} + \sum_{n=0}^{\infty} B_n \zeta_n^{(1)}(k_0 r) P_n(\cos\theta) =$$

$$= \begin{cases} \sum\limits_{n=0}^{\infty} (\beta a_n + B_n) \zeta_n^{(1)}(k_0 r) P_n(\cos\theta) & (r > r'), \\ \sum\limits_{n=0}^{\infty} [\beta b_n \psi_n(k_0 r) + B_n \zeta_n^{(1)}(k_0 r)] P_n(\cos\theta) & (r < r'), \end{cases}$$

donde

$$A_n = \frac{\zeta_n^{(1)}(k_0 a)\Psi_n(k_0 a) - \psi_n(k_0 a) Z_n^{(1)}(k_0 a)}{\frac{k_0^2}{k^2}\zeta_n^{(1)}(k_0 a)\Psi_n(ka) - Z_n^{(1)}(k_0 a)\psi_n(ka)} \frac{k_0^2}{k^2} \beta b_n, \qquad k_0 = \frac{\omega}{c},$$

$$B_n = \frac{\psi_n(ka)\Psi_n(k_0 a) - \frac{k_0^2}{k^2}\Psi_n(k_0 a)\psi_n(ka)}{\frac{k_0^2}{k^2}\zeta_n^{(1)}(k_0 a)\Psi_n(ka) - Z_n^{(1)}(k_0 a)\psi_n(ka)} \beta b_n,$$

$$k^2 = \frac{\varepsilon\omega^2 + i\cdot 4\pi\sigma\omega}{c^2}, \qquad \mu = 1,$$

$$a_n = (2n+1)\psi_n(k_0 r'), \qquad b_n = (2n+1)\zeta_n^{(1)}(k_0 r'), \qquad \beta = \frac{2ip_0 k_0}{a+h}.$$

Si la tierra es idealmente conductora, entonces

$$A_n = 0, \qquad B_n = -\frac{\Psi_n(k_0 a)}{Z_n^{(1)}(k_0 a)} \beta b_n.$$

Como resultado tenemos:

$$u_1=0,$$

$$u_2=\bar{u}_0-\sum_{n=0}^{\infty}\beta b_n\frac{\psi_n(k_0a)\zeta_n^{(1)}(k_0r)}{Z_n^{(1)}(k_0a)}P_n(\cos\theta).$$

Véase el problema 91.

93. *Antena eléctrica vertical sobre la tierra esférica.* La antena está colocada en el punto $r'=a$, $\theta=0$ sobre la superficie de la tierra.

Dentro de la tierra $(r<a)$

$$u_1=\frac{2p_0k_0^2}{a^2k^2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2n+1)\zeta_n^{(1)}(k_0a)}{\psi_n(ka)\left[Z_n^{(1)}(k_0a)-C_n\right]}\psi_n(kr)P_n(\cos\theta),$$

fuera de la tierra $(r>a)$

$$u_2=\frac{2p_0}{a^2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2n+1)\zeta_n^{(1)}(k_0r)}{C_n-Z_n^{(1)}(k_0a)}P_n(\cos\theta).$$

Aquí C_n significa la expresión

$$C_n=\frac{k_0^2}{k^2}\frac{\psi_n(ka)}{\psi_n(ka)}\zeta_n^{(1)}(k_0a).$$

Indicación. En la resolución del problema anterior es necesario realizar el paso al límite para $h\to 0$. Durante los cálculos utilizar la expresión para el wronskiano

$$\psi_n(x)\zeta_n^{(1)\prime}(x)-\zeta_n^{(1)}(x)\psi_n'(x)=\frac{i}{x^2}.$$

El paso al límite para $h\to 0$ da:

$$\lim_{h\to 0}(a_n\beta+B_n)=\frac{2p_0}{a^2}\frac{2n+1}{C_n-Z_n^{(1)}(k_0a)}.$$

4. Antena sobre la tierra plana

94. Se introduce el vector de Hertz Π dirigido a lo largo de la antena. En el sistema de coordenadas cilíndricas ρ, φ, z, tenemos:

$$\Pi_\rho=\Pi_\varphi=0,\quad \Pi_z=\Pi.$$

Dado que el problema posee simetría axial,

$$E_\rho=\frac{\partial^2\Pi}{\partial\rho\,\partial z},\quad E_\varphi=0,\quad E_z=\frac{\partial^2\Pi}{\partial z^2}+k^2\Pi=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial\Pi}{\partial\rho}\right),\quad \Delta\Pi+k^2\Pi=0,$$

$$H_\rho=H_z=0,\quad H_\varphi=-\frac{ick^2}{\omega}\frac{\partial\Pi}{\partial\rho}.$$

Sobre la superficie terrestre para $z=0$

$$k_0^2\Pi_0=k^2\Pi,\quad \frac{\partial\Pi_0}{\partial z}=\frac{\partial\Pi}{\partial z},$$

donde

$$\Pi_0, \quad k_0^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \quad \text{corresponde a } z > 0 \text{ (la atmósfera),}$$

$$\Pi, k^2 = \frac{\varepsilon\omega^2 + i4\pi\sigma\omega}{c^2} \quad \text{corresponde a } z < 0 \text{ (la tierra)}$$

$$(\mu = 1).$$

El momento del dipolo $p = p_0 e^{-i\omega t}$, $p_0 = 1$; el multiplicador $e^{-i\omega t}$ está omitido en todas partes.

95. El campo electromagnético se expresa mediante el vector magnético de Hertz en el cual es diferente de cero sólo la componente a lo largo del eje de la antena $\Pi_z = \Pi$, por eso $E_z = 0$. En virtud de la simetría axial

$$E_\rho = 0, \quad E_\varphi = i\frac{\omega}{c}\frac{\partial\Pi}{\partial\rho},$$

$$H_\rho = \frac{\partial^2\Pi}{\partial\rho\,\partial z}, \quad H_\varphi = 0, \quad H_z = k^2\Pi + \frac{\partial^2\Pi}{\partial z^2}.$$

El potencial Π satisface la ecuación

$$\Delta\Pi + k^2\Pi = 0, \quad \text{donde} \quad k^2 = \begin{cases} k_0^2 = \dfrac{\omega^2}{c^2} & \text{para} \quad z > 0, \\ \dfrac{\varepsilon\omega^2 + i\,4\pi\sigma\omega}{c^2} & \text{para} \quad z < 0, \end{cases}$$

y las condiciones de conjugación sobre la superficie terrestre

$$\Pi_0 = \Pi, \quad \frac{\partial\Pi_0}{\partial z} = \frac{\partial\Pi}{\partial z} \quad \text{para} \quad z = 0,$$

además

$$\Pi_0 = \frac{e^{ik_0R}}{R} + \Pi_{0\,\text{seg.}},$$

$$\Pi = \frac{e^{ikR}}{R} + \Pi_{\text{seg.}},$$

donde $R = \sqrt{r^2 + z^2}$. Los primeros términos en nuestras expresiones significan el potencial de Hertz para el dipolo en el medio no acotado con el número de onda correspondiente (k o k_0); $\Pi_{0\,\text{seg.}}$ y $\Pi_{\text{seg.}}$, la radiación secundaria.

96. Introducimos el sistema de coordenadas x, y, z, dirigiendo el eje z perpendicularmente a la superficie terrestre y el eje x, a lo largo de la antena,

$$E = \text{grad div } \Pi + k^2\Pi, \quad H = -\frac{ik^2c}{\omega}\text{ rot } \Pi, \quad \Pi = (\Pi_x, 0, \Pi_z),$$

donde Π_x y Π_z satisfacen la ecuación de onda

$$E_x = k^2\Pi_x + \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial\Pi_x}{\partial x} + \frac{\partial\Pi_z}{\partial z}\right), \quad E_y = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial\Pi_x}{\partial x} + \frac{\partial\Pi_z}{\partial z}\right),$$

$$E_z = k^2\Pi_z + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial\Pi_x}{\partial x} + \frac{\partial\Pi_z}{\partial z}\right),$$

$$H_x = -\frac{ick^2}{\omega}\frac{\partial\Pi_z}{\partial y}, \quad H_y = -\frac{ick^2}{\omega}\left(\frac{\partial\Pi_x}{\partial z} - \frac{\partial\Pi_z}{\partial x}\right), \quad H_z = \frac{ick^2}{\omega}\frac{\partial\Pi_x}{\partial y}.$$

Las condiciones de frontera para $z=0$ (sobre la superficie terrestre) son:

$$k_0^2\Pi_{0z} = k^2\Pi_z, \qquad k_0^2\frac{\partial\Pi_{0x}}{\partial z} = k^2\frac{\partial\Pi_x}{\partial z},$$

$$k_0^2\Pi_{0x} = k^2\Pi_x, \quad \frac{\partial\Pi_{0x}}{\partial x} + \frac{\partial\Pi_{0z}}{\partial z} = \frac{\partial\Pi_x}{\partial x} + \frac{\partial\Pi_z}{\partial z}.$$

Habitualmente, en lugar de Π_z se introduce la función F:

$$\Pi_{0z} = \frac{\partial F_0}{\partial x}, \quad \Pi_z = \frac{k_0^2}{k^2}\frac{\partial F}{\partial x}.$$

La primera y la última condiciones de frontera dan:

$$F_0 = F, \quad \Pi_{0x} + \frac{\partial F_0}{\partial z} = \Pi_x + \frac{k_0^2}{k^2}\frac{\partial F}{\partial z}.$$

97. Sea que el cuadro con la corriente eléctrica está colocado en el plano x, z, de modo que la normal al cuadro está dirigida a lo largo del eje y. Los vectores del campo se expresan mediante el vector magnético de Hertz

$$\mathbf{E} = i\frac{\omega}{c}\operatorname{rot}\mathbf{\Pi}, \quad \mathbf{H} = k^2\mathbf{\Pi} + \operatorname{grad}\operatorname{div}\mathbf{\Pi},$$

el vector Π tiene las componentes Π_y y Π_z diferentes de cero, de modo que

$$E_x = \frac{i\omega}{c}\left(\frac{\partial\Pi_z}{\partial y} - \frac{\partial\Pi_y}{\partial z}\right), \quad E_y = -\frac{i\omega}{c}\frac{\partial\Pi_z}{\partial x}, \quad E_z = i\frac{\omega}{c}\frac{\partial\Pi_y}{\partial x},$$

$$H_x = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial\Pi_y}{\partial y} + \frac{\partial\Pi_z}{\partial z}\right), \quad H_y = k^2\Pi_y + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial\Pi_y}{\partial y} + \frac{\partial\Pi_z}{\partial z}\right),$$

$$H_z = k^2\Pi_z + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial\Pi_y}{\partial y} + \frac{\partial\Pi_z}{\partial z}\right).$$

Las condiciones de frontera para $z=0$ son

$$\Pi_{0z} = \Pi_z, \quad k_0^2\Pi_{0y} = k^2\Pi_y,$$

$$\frac{\partial\Pi_{0y}}{\partial z} = \frac{\partial\Pi_y}{\partial z}, \quad \frac{\partial\Pi_{0y}}{\partial y} + \frac{\partial\Pi_{0z}}{\partial z} = \frac{\partial\Pi_y}{\partial y} + \frac{\partial\Pi_z}{\partial z}.$$

Si tomamos

$$\Pi_{0z} = \frac{\partial F_0}{\partial y}, \quad \Pi_z = \frac{\partial F}{\partial y},$$

entonces, en vez de la primera y cuarta condiciones obtenemos:

$$F_0 = F, \quad \Pi_{0y} + \frac{\partial F_0}{\partial z} = \Pi_y + \frac{\partial F}{\partial z}.$$

98. Colocamos dentro de la antena el origen del sistema de coordenadas. Entonces, sobre de la tierra

$$\Pi_0=\frac{2k^2}{k_0^2+k^2}\frac{e^{ik_0R}}{R}+\int_0^\infty f_0(\lambda)\,J_0(\lambda r)\,e^{-\sqrt{\lambda^2-k_0^2}z}d\lambda \quad (z>0),$$

en la tierra

$$\Pi=\frac{2k_0^2}{k_0^2+k^2}\frac{e^{ikR}}{R}\int_0^\infty f(\lambda)\,J_0(\lambda r)\,e^{\sqrt{\lambda^2-k^2}z}d\lambda \ (z<0),$$

donde

$$f_0(\lambda)=\frac{2k_0^2k^2}{k_0^2+k^2}\frac{\lambda}{\sqrt{\lambda^2-k_0^2}}\;\frac{\sqrt{\lambda^2-k_0^2}-\sqrt{\lambda^2-k^2}}{k^2\sqrt{\lambda^2-k_0^2}+k_0^2\sqrt{\lambda^2-k^2}},$$

$$f(\lambda)=-\frac{2k_0^2k^2}{k_0^2+k^2}\frac{\lambda}{\sqrt{\lambda^2-k^2}}\;\frac{\sqrt{\lambda^2-k_0^2}-\sqrt{\lambda^2-k^2}}{k^2\sqrt{\lambda^2-k_0^2}+k_0^2\sqrt{\lambda^2-k^2}},$$

$$R=\sqrt{r^2+z^2}.$$

Resolución. Introducimos de acuerdo con el problema 94 el vector eléctrico de Hertz $\Pi=(0,\,0,\,\Pi_z=\Pi)$, además

$$\Pi_0=\frac{2k^2}{k_0^2+k^2}\frac{e^{ik_0R}}{R}+\Pi_{0\,\mathrm{sec}},\qquad \Pi=\frac{2k_0^2}{k_0^2+k^2}\frac{e^{ikR}}{R}+\Pi_{\mathrm{sec}}$$

Utilizaremos el desarrollo integral del potencial primario

$$\frac{e^{ikR}}{R}=\int_0^\infty J_0(\lambda r)\,\frac{e^{-\sqrt{\lambda^2-k^2}\,|z|}\lambda\,d\lambda}{\sqrt{\lambda^2-k^2}},$$

y buscaremos la excitación secundaria en la forma

$$\Pi_{0\,\mathrm{sec}}=\int_0^\infty f_0(\lambda)\,J_0(\lambda r)\,e^{-\sqrt{\lambda^2-k_0^2}z}d\lambda \quad (z>0),$$

$$\Pi_{\mathrm{sec}}=\int_0^\infty f(\lambda)\,J_0(\lambda r)\,e^{\sqrt{\lambda^2-k^2}z}d\lambda \qquad (z<0).$$

$\Pi_{0\,\mathrm{sec}}$. y Π_{sec}. expresadas por estas integrales, obviamente, satisfacen las ecuaciones

$$\Delta\Pi_{0\,\mathrm{sec}}+k_0^2\Pi_{0\,\mathrm{sec}}=0,\qquad \Delta\Pi_{\mathrm{sec}}+k^2\Pi_{\mathrm{sec}}=0.$$

Exigiendo el cumplimiento de las condiciones de frontera

$$k_0^2\Pi_0=k^2\Pi,\qquad \frac{\partial\Pi_0}{\partial z}=\frac{\partial\Pi}{\partial z}\qquad \text{para}\quad z=0,$$

obtenemos:

$$\int_0^\infty J_0(\lambda r)\left[\frac{2k_0^2k^2}{k_0^2+k^2}\frac{\lambda}{\mu_0}+f_0(\lambda)k^2\right]d\lambda=\int_0^\infty\left[\frac{2k_0^2k^2}{k_0^2+k^2}\frac{\lambda}{\mu}+f(\lambda)k^2\right]J_0(\lambda r)\,d\lambda$$

y
$$\int_0^\infty[\mu_0 f_0(\lambda)+\mu f(\lambda)]\,J_0(\lambda r)\,d\lambda=0$$

donde $\mu^2=\lambda^2-k^2$, $\mu_0^2=\lambda^2-k_0^2$.

De aquí y hallamos

$$f_0(\lambda)=\frac{2k_0^2k^2}{k_0^2+k^2}\frac{\lambda}{\mu_0}\frac{\mu_0-\mu}{k^2\mu_0+k_0^2\mu},$$
$$f(\lambda)=-\frac{2k_0^2k^2}{k_0^2+k^2}\frac{\lambda}{\mu}\frac{\mu_0-\mu}{k^2\mu_0+k_0^2\mu}.$$

Casos particulares:

1) $k=\infty$, la tierra es un conductor

$$f(\lambda)=0,\quad f_0(\lambda)=\frac{2\lambda}{\mu_0},$$
$$\Pi_0=2\int_0^\infty J_0(\lambda r)\,e^{-\mu_0|z|}\frac{\lambda\,d\lambda}{\mu_0}=2\frac{e^{ik_0R}}{R},$$
$$\Pi=0\ \text{(dentro de la tierra)}.$$

La excitación primaria se refleja de la superficie terrestre.

2) $k=k_0$, la antena en un medio homogéneo (en el aire). En este caso

$$f_0(\lambda)=0,\quad f(\lambda)=0,$$

$\Pi=\dfrac{e^{ik_0R}}{R}$ en todo el espacio.

99. El vector magnético de Hertz $\mathbf{\Pi}=(0,\ 0,\Pi)$ se determina del modo siguiente:

sobre la tierra

$$\Pi_0=\frac{e^{ik_0R}}{R}+\int_0^\infty f_0(\lambda)\,J_0(\lambda r)\,e^{-\mu_0 z}d\lambda\quad(z>0),$$

dentro de la tierra

$$\Pi=\frac{e^{ikR}}{R}+\int_0^\infty f(\lambda)\,J_0(\lambda r)\,e^{\mu z}d\lambda\quad(z<0),$$

donde

$$f_0(\lambda)=\frac{\lambda}{\mu_0}\frac{\mu_0-\mu}{\mu_0+\mu},\qquad f(\lambda)=\frac{\lambda}{\mu}\frac{\mu-\mu_0}{\mu+\mu_0},$$
$$\mu_0=\sqrt{\lambda^2-k_0^2},\qquad \mu=\sqrt{\lambda^2-k^2},$$

Las expresiones para Π_0 y Π se puede escribir de otro modo:

$$\Pi_0=\int_0^\infty \frac{2J_0(\lambda r)}{\mu+\mu_0}e^{-\mu_0 z}\lambda\,d\lambda \quad \text{para} \quad z>0,$$

$$\Pi=\int_0^\infty \frac{2J_0(\lambda r)}{\mu+\mu_0}e^{\mu z}\lambda\,d\lambda \quad \text{para} \quad z<0.$$

En el caso de la tierra idealmente conductora $k=\infty$, $\mu=\infty$ y $\Pi=\Pi_0=0$. La acción de la antena magnética se compensa por las corrientes vertiginosas que surgen dentro de la tierra.

Indicación. Véanse los problemas 95 y 98.

100. Si la antena está dirigida a lo largo del eje x, entonces en correspondencia con el problema 96 el vector de Hertz es $\Pi=(\Pi_x,\ 0,\ \Pi_z)$, donde

$$\Pi_{0x}=\int_0^\infty \frac{2J_0(\lambda r)}{N'}e^{-\mu_0 z}\lambda\,d\lambda \quad \text{para} \quad z>0,$$

$$\Pi_x=\frac{k_0^2}{k^2}\int_0^\infty \frac{2J_0(\lambda r)}{N'}e^{\mu z}\lambda\,d\lambda \quad \text{para} \quad z<0,$$

$$\Pi_{0z}=2(k^2-k_0^2)\cos\varphi\int_0^\infty \frac{J_0'(\lambda r)}{NN'}e^{-\mu_0 z}\lambda^2\,d\lambda, \quad z>0,$$

$$\Pi_z=\frac{2k_0^2}{k^2}(k^2-k_0^2)\cos\varphi\int_0^\infty \frac{J_0'(\lambda r)}{NN'}e^{\mu z}\lambda^2\,d\lambda, \quad z<0,$$

donde

$$N'=\mu+\mu_0, \quad N=k^2\mu_0+k_0^2\mu, \quad \mu=\sqrt{\lambda^2-k^2}, \quad \mu_0=\sqrt{\lambda^2-k_0^2}.$$

Indicación. La función Π_x se determina por la ecuación $\Delta\Pi_x+k^2\Pi_x=0$ y las condiciones de frontera

$$k_0^2\Pi_{0x}=k^2\Pi_x, \quad k_0^2\frac{\partial\Pi_{0x}}{\partial z}=k^2\frac{\partial\Pi_x}{\partial z} \quad \text{para} \quad z=0.$$

De aquí se ve que las funciones Π_{0x} y $\frac{k^2}{k_0^2}\Pi_x$ coinciden con las expresiones para Π_0 y Π en la solución del problema anterior.

Para la función $\Pi_z=\frac{\partial F}{\partial x}$ tenemos:

$$F_0=F, \quad \Pi_{0x}+\frac{\partial F_0}{\partial z}=\Pi_x+\frac{k_0^2}{k^2}\frac{\partial F}{\partial z} \quad \text{para} \quad z=0.$$

Tomando

$$F_0 = \int_0^\infty f_0(\lambda) J_0(\lambda r) e^{-\mu_0 z} d\lambda \quad (z > 0),$$

$$F = \int_0^\infty f(\lambda) J_0(\lambda r) e^{\mu z} d\lambda \quad (z < 0)$$

y utilizando las expresiones ya halladas para Π_{0x} y Π_x, obtenemos:

$$f_0(\lambda) = f(\lambda) = \frac{2(k^2 - k_0^2)\lambda}{NN'}.$$

La función Π_z se calcula según la fórmula

$$\Pi_{0z} = \frac{\partial F_0}{\partial x} = \cos\varphi \frac{\partial F_0}{\partial r}, \qquad \Pi_z = \frac{k_0^2}{k^2} \cos\varphi \frac{\partial F}{\partial r}.$$

101. Utilizamos todas las notaciones del problema 97. En este caso los campos E y H se expresan mediante el vector magnético de Hertz $\Pi = (0, \Pi_y, \Pi_z)$, donde

$$\Pi_{0y} = \int_0^\infty \frac{2k^2}{N} J_0(\lambda r) e^{-\mu_0 z} \lambda \, d\lambda \quad \text{para} \quad z > 0,$$

$$\Pi_y = \int_0^\infty \frac{2k_0^2}{N} J_0(\lambda r) e^{\mu z} \lambda \, d\lambda \quad \text{para} \quad z < 0,$$

$$\Pi_{0z} = 2(k^2 - k_0^2) \operatorname{sen}\varphi \int_0^\infty \frac{J_0'(\lambda r)}{NN'} e^{-\mu_0 z} \lambda^2 \, d\lambda \quad \text{para} \quad z > 0,$$

$$\Pi_z = 2(k^2 - k_0^2) \operatorname{sen}\varphi \int_0^\infty \frac{J_0'(\lambda r)}{NN'} e^{\mu z} \lambda^2 \, d\lambda \quad \text{para} \quad z < 0.$$

Los valores de N y N' se dan en la respuesta al problema anterior.

102. El potencial polarizado $\Pi = (0, 0, \Pi_z = \Pi)$ determina las componentes del campo electromagnético mediante las fórmulas

$$E = \operatorname{grad} \operatorname{div} \Pi + k^2 \Pi, \qquad H = -ik \operatorname{rot} \Pi.$$

Para el potencial

$$\Pi = \begin{cases} \Pi_1 & \text{para} \quad z > a, \\ \Pi_2 & \text{para} \quad 0 < z < a \end{cases}$$

obtenemos

$$\Pi_1 = \Pi_{1\,\text{prim.}} + \Pi_{1\,\text{sec.}}, \qquad \Pi_2 = \Pi_{2\,\text{prim.}} + \Pi_{2\,\text{sec.}},$$

donde

$$\Pi_{1\,\text{prim.}} = \int_0^\infty J_0(\lambda r) e^{-\mu_1 |z - z_0|} \frac{\lambda \, d\lambda}{\mu_1},$$

$$\Pi_{1\ \text{sec.}} = \int_0^\infty f_1(\lambda)\, J_0(\lambda r)\, e^{-\mu_1(z+z_0-2a)} \frac{\lambda\, d\lambda}{\mu_1},$$

$$\Pi_{2\ \text{prim.}} = \int_0^\infty f_2(\lambda)\, J_0(\lambda r)\, e^{\mu_2(z-z_0)} \frac{\lambda\, d\lambda}{\mu_2},$$

$$\Pi_{2\ \text{sec.}} = \int_0^\infty f_3(\lambda)\, J_0(\lambda r)\, e^{-\mu_2(z+z_0)} \frac{\lambda\, d\lambda}{\mu_2},$$

$$\mu_1 = \sqrt{\lambda^2 - k_1^2}; \qquad \mu_2 = \sqrt{\lambda^2 - k_2^2}.$$

Utilizando las condiciones de frontera

$$k_1^2\Pi_1 = k_2^2\Pi_2, \qquad \frac{\partial \Pi_1}{\partial z} = \frac{\partial \Pi_2}{\partial z} \qquad \text{para} \qquad z = a,$$

y también $\dfrac{\partial \Pi_2}{\partial z} = 0$ para $z = 0$, hallamos

$$f_1(\lambda) = \frac{k_2^2\mu_1 - k_1^2\mu_2 \operatorname{th} \mu_2 a}{k_2^2\mu_1 + k_1^2\mu_2 \operatorname{th} \mu_2 a},$$

$$f_2(\lambda) = f_3(\lambda) = \frac{\mu_2 k_1^2 e^{-\mu_1 z_0 + \mu_1 a + \mu_2 z_0}}{\mu_2 k_1^2 \operatorname{sh} \mu_2 a + \mu_1 k_2^2 \operatorname{ch} \mu_2 a}.$$

103. Sea $I = I_0 f(s) e^{-i\omega t}$ $(f(s) \geqslant 1)$ la intensidad de la corriente en el conductor rectilíneo $-l \leqslant s \leqslant l$ de longitud $2l$. El sistema de coordenadas cilíndricas está elegido de tal modo que la corriente de línea está dirigida a lo largo del eje z y es simétrica con respecto al origen de las coordenadas. El vector de Hertz $\mathbf{\Pi} = (0, 0, \Pi)$ se determina por la fórmula

$$\Pi(\rho, \varphi, z) = \frac{I_0}{-ikc} \int_{-l}^{l} \Pi^0 [\rho, \varphi, z; \xi, \psi, \zeta]\, f(\zeta)\, d\zeta,$$

donde $\Pi^0 = \dfrac{e^{ikR}}{R}$; R, la distancia entre los puntos $[M(\rho, \varphi), z]$ y $[M_0(\xi, \psi), \zeta]$,

$$E = \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{\Pi} + k^2\mathbf{\Pi}, \qquad H = -ik \operatorname{rot} \mathbf{\Pi}.$$

La resistencia de radiación es igual a

$$\widetilde{R} = -\frac{1}{I_0} \left\{ \int_{-l}^{l} \Pi\, [f'' + k^2 f]\, dz - \Pi f' \Big|_{-l}^{l} \right\},$$

si

$$f(-l) = f(l) = 0.$$

Indicación. La normación de Π se obtiene de la condición $H_\psi \approx \dfrac{2l}{c\rho}$ cerca de la corriente.

La resistencia de entrada de la corriente de línea se determina por la siguiente fórmula del método de las fuerzas electromotrices inducidas

$$\widetilde{R}=-\frac{1}{I_0}\int_{-l}^{l}E_z\,(MM_0;\ z)\ f\ (z)\,dz.$$

Sustituyendo aquí E_z por la expresión

$$E_z=\frac{\partial^2\Pi}{\partial z^2}+k^2\Pi$$

e integrando por partes, obtenemos la expresión dada más arriba para $\widetilde{R}$.

104. Si el dipolo es semiondular, entonces $I=I_0 f\ (z)$ para $-l\leqslant z\leqslant l$, donde

$$f\ (z)=\cos kz,\qquad k=\frac{\omega}{c},$$

$$\Pi=\frac{I_0}{-ikc}\int_{-l}^{l}\Pi^0\ (M,\ M_0,\ z-\zeta)\cos k\zeta\, d\zeta,$$

la resistencia de entrada del dipolo semiondular es

$$\widetilde{R}=\frac{1}{c}\cdot\left\{\int_0^{2\pi}\frac{1-\cos\alpha}{\alpha}\,d\alpha-i\int_0^{2\pi}\frac{\operatorname{sen}\alpha}{\alpha}\,d\alpha\right\}.$$

La componente activa de la resistencia de entrada o resistencia de irradiación es

$$\widetilde{R}_a=\frac{1}{c}\int_0^{2\pi}\frac{1-\cos\alpha}{\alpha}\,d\alpha.$$

La componente reactiva o reactancia es

$$\widetilde{R}_r=-\frac{1}{c}\int_0^{2\pi}\frac{\operatorname{sen}\alpha}{\alpha}\,d\alpha.$$

Resolución. Para calcular $\widetilde{R}$ se utiliza $E_z=\dfrac{\partial^2\Pi}{\partial z^2}+k^2\Pi$, donde

$$E_z=\frac{I_0}{-ick}\int_{-l}^{l}\left[\frac{\partial_2\Pi^0}{\partial z^2}+k^2\Pi^0\ (M,\ M_0;\ z-\zeta)\right] f\ (\zeta)\ d\zeta.$$

Teniendo en cuenta que $\dfrac{\partial^2\Pi^0}{\partial z^2}=\dfrac{\partial^2\Pi^0}{\partial\zeta^2}$ e integrando por partes, obtenemos:

$$E_z\,(M,\ M_0,\ z)=\frac{I_0}{-ick}\left\{\int_{-l}^{l}\Pi^0\ (M,\ M_0;\ z-\zeta)\ [f''\ (\zeta)+k^2 f\ (\zeta)]\ d\zeta+\right.$$

$$\left.+\Pi^0\,(M,\ M_0;\ l+z)\ f'\ (-l)-\Pi^0\,(M,\ M_0;\ l-z)\ f'\ (l)\right\}.$$

Esto es posible si $f''\ (z)$ es continua a trozos.

Para el dipolo semiondular

$$f''(z)+k^2f=0, \quad f(\pm l)+0, \quad f'(-l)=-f'(l)=k.$$

Por eso,

$$E_z(M, M_0; z)=\frac{I_0}{-ic}\{\Pi^0(M, M_0, l+z)+\Pi^0(M, M_0; l-z)\}.$$

La sustitución de este valor de E_z en la fórmula

$$\widetilde{R}=-\frac{1}{I_0}\int_{-l}^{l}E_z(M_0, M_0; z)\,f(z)\,dz$$

da:

$$\widetilde{R}=-\frac{2i}{c}\int_{-l}^{l}\Pi^0(M_0, M_0; l+z)\,f(z)\,dz,$$

donde

$$\Pi^0(M_0; M_0; l+z)=\frac{e^{ik(l+z)}}{l+z}.$$

Tomando $l+z=\alpha$, después de transformaciones simples obtenemos la fórmula dada más arriba para $\widetilde{R}$. En particular, en el sistema de unidades prácticas

$$\widetilde{R}=30\left\{\int_0^{2\pi}\frac{1-\cos\alpha}{\alpha}\,d\alpha-i\int_0^{2\pi}\frac{\operatorname{sen}\alpha}{\alpha}\,d\alpha\right\}\text{ om.}$$

105. Sea que el eje z coincide con el eje del guíaondas y el dipolo está en el plano $z=\zeta$ en el punto M_0 y se halla dirigido paralelamente al eje z. El campo se determina sólo por la componente z del vector eléctrico de Hertz

$$\mathbf{\Pi}=(0, 0, \Pi),$$

donde

$$\Pi=\frac{4\pi p_0}{-ikc}\Pi^0(M, M_0; z-\zeta) \quad p_0=I_0l \text{ es el momento del dipolo,}$$

M y M_0 son los puntos en el plano de la sección perpendicular,

$$\Pi_0(M, M_0; z-\zeta)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\psi_n(M)\,\psi_n(M_0)}{2p_n}e^{-p_n|z-\zeta|}, \tag{1}$$

$p_n=\sqrt{\lambda_n-k^2}$, $k=\omega/c$; λ_n, el valor propio, y ψ_n, las funciones propias normadas del problema de contorno

$$\Delta_2\psi_n+\lambda_n\psi_n=0 \quad \text{en} \quad S, \qquad \psi_n=0 \quad \text{sobre} \quad C,$$

S la sección transversal del guíaondas; C, la frontera de S.

La resistencia de radiación

$$\widetilde{R}^{(a)} = \lim_{z\to\infty} \frac{1}{I_0^2} \int\limits_{S_z+S_{-z}}\int \frac{c}{4\pi} [EH^*]\, d\sigma$$

es igual

$$\widetilde{R}^{(a)} = \frac{4\pi}{c} \frac{l^2}{k} \sum_{n=1}^{N} \frac{\lambda_n \psi_n^2 (M_0)}{2\sqrt{k^2-\lambda_n}},$$

donde N es el número máximo de las ondas móviles dentro del guíaondas de modo que

$$\lambda_N < k^2, \quad \lambda_{N+1} > k^2.$$

Si el dipolo está sobre el eje del guíaondas circular de radio a, entonces

$$\widetilde{R}^{(a)} = \frac{2}{ck^2a^2} \left(\frac{l}{a}\right)^2 \sum_{m=1}^{N} \frac{\mu_m^2}{I_1^2(\mu_m)\sqrt{1-\frac{\mu_m^2}{a^2k^2}}},$$

donde μ_m es la raíz de la ecuación $J_0(\mu) = 0$.

Indicación. La fórmula $\Pi = \frac{4\pi p_0}{-ikc}\Pi^0$ es consecuencia de la fórmula general para Π dada en la respuesta al problema 103. La función del manantial Π^0 para la ecuación de onda

$$\Delta u + k^2 u = 0$$

en una región cilíndrica arbitraria con las condiciones de frontera nulas fue construida en el problema 45.

Para calcular $\widetilde{R}^{(a)}$ se utilizó la fórmula

$$\widetilde{R}^{(a)} = \lim_{z\to\infty} \frac{c}{4\pi I_0^2} \int\limits_{S_z+S_{-z}}\int \{E_x H_y^* - E_y H_x^*\}\, dx\, dy^*$$

y la primera fórmula de Green.

106. Para una corriente arbitraria de línea $I = I_0 f(z)$ cuando $-l \leqslant z \leqslant l$, la función de Hertz es

$$\Pi = \frac{4\pi I_0}{-ikc} \int_{-l}^{l} \Pi^0 (M, M_0; z-\zeta) f(\zeta)\, d\zeta,$$

donde $\Pi^0 (M, M_0; z-\zeta)$ se da por la fórmula (1) de la respuesta al problema anterior.

La potencia de radiación $W_r = I_0^2 \widetilde{R}^{(a)}$, donde

$$\widetilde{R}^{(a)} = \frac{4\pi}{ck} \sum_{n=1}^{N} \frac{\lambda_n^2 \psi_n^2 (M_0)}{2\varkappa_n} \left\{\left[\int_{-l}^{l} f(\zeta) \cos \varkappa_n \zeta\, d\zeta\right]^2 + \left[\int_{-l}^{l} f(\zeta) \operatorname{sen} \varkappa_n \zeta\, d\zeta\right]^2\right\},$$

$$\varkappa_n = \sqrt{k^2-\lambda_n}.$$

---

*) Véase 7, pág. 526.

En el caso general, para el dipolo semiondular dentro del guíaondas de sección arbitraria S se obtienen las fórmulas

$$\widetilde{R}^{(a)}=\frac{4\pi}{c}\sum_{n=1}^{N}\frac{\psi_n^2(M_0)\left(1+\cos\pi\sqrt{1-\gamma_n^2}\right)}{\lambda_n\sqrt{1-\gamma_n^2}},$$

$$\widetilde{R}^{(r)}=-\frac{4\pi}{c}\sum_{n=1}^{N}\frac{\psi_n^2(M_0)\operatorname{sen}\pi\sqrt{1-\gamma_n^2}}{\lambda_n\sqrt{1-\gamma_n^2}}+$$

$$+\frac{4\pi}{c}\sum_{n=N+1}^{\infty}\frac{\psi_n^2(M_0)\left(1+e^{-\pi\sqrt{\gamma_n^2-1}}\right)}{\lambda_n\sqrt{\gamma_n^2-1}},$$

$\Delta\psi_n+\lambda_n\psi_n=0$ en S; $\psi_n=0$ sobre C;

$\int\limits_S \psi_n^2\,dS=1$; $\gamma_n^2=\frac{\lambda_n}{k^2}$; C es la frontera de S; $\gamma_N<1$; $\gamma_{N+1}>1$. Véanse los problemas 45 y 103.

107. Para el dipolo semiondular que está sobre el eje del guíaondas circular tenemos:

la parte activa de la resistencia de entrada es

$$\widetilde{R}^{(a)}=\frac{4}{c}\sum_{m=1}^{N}\frac{1+\cos\pi\sqrt{1-\gamma_m^2}}{J_1^2(\mu_m)\,\mu_m^2\sqrt{1-\gamma_m^2}}\qquad(\gamma_N<1,\quad \gamma_{N+1}>1),$$

la reactancia es

$$\widetilde{R}^{(r)}=-\frac{4}{c}\sum_{m=1}^{N}\frac{\operatorname{sen}\pi\sqrt{1-\gamma_m^2}}{J_1^2(\mu_m)\,\mu_m^2\sqrt{1-\gamma_m^2}}+\frac{4}{c}\sum_{m=N+1}^{\infty}\frac{1-e^{-\pi\sqrt{\gamma_m^2-1}}}{J_1^2(\mu_m)\,\mu_m^2\sqrt{\gamma_m^2-1}},$$

donde $\gamma_m^2=\frac{\mu_m^2}{a^2k^2}$; μ_m es la raíz de la ecuación $J_0(\mu)=0$; a, el radio del guíaondas.

108. Sea S $(0\leqslant x\leqslant a,\ 0\leqslant y\leqslant b)$ la sección del guíaondas.

a) El dipolo infinitésimo está orientado a lo largo del eje y se halla en el punto M_0 $(d,\ y_0)$. La resistencia de radiación de este dipolo se da por la fórmula

$$\widetilde{R}^{(a)}=\frac{l^2}{\omega\varepsilon}\sum_{m=1}^{N}\sum_{n=1}^{N'}\frac{\varkappa_{mn}\left[\frac{\partial\psi_{mn}}{\partial y_0}(M_0)\right]^2}{2\lambda_{mn}}+\omega\mu l^2\sum_{m=0}^{N_1}\sum_{n=0}^{N_1'}\frac{\left[\frac{\partial\hat{\psi}_{mn}}{\partial x_0}(M_0)\right]^2}{2\hat{\varkappa}_{mn}\hat{\lambda}_{mn}},\quad(1)$$

donde

$$\psi_n(M)=\psi_{mn}(x,\ y)=\sqrt{\frac{4}{ab}}\operatorname{sen}\frac{\pi m}{a}x\operatorname{sen}\frac{\pi n}{b}y,$$

$$\hat{\psi}_n(M)=\hat{\psi}_{mn}(x,\ y)=\sqrt{\frac{\varepsilon_m\varepsilon_n}{ab}}\cos\frac{\pi m}{a}x\cos\frac{\pi n}{b}y\qquad\left(\varepsilon_j=\begin{cases}1, & j=0,\\ 2, & j\neq 0\end{cases}\right),$$

$$\lambda_{mn}=\pi^2\left(\frac{m^2}{a^2}+\frac{n^2}{b^2}\right)\quad (m,\ n=1,\ 2,\ \ldots),$$

$$\hat{\lambda}_{mn}=\pi^2\left(\frac{m^2}{a^2}+\frac{n^2}{b^2}\right)\quad (m,\ n=0,\ 1,\ 2,\ \ldots),$$

$$\varkappa_{mn}=\sqrt{k^2-\lambda_{mn}},\quad \hat{\varkappa}_{mn}=\sqrt{k^2-\hat{\lambda}_{mn}}.$$

Los límites N y N', N_1 y N_1' son tales, que $\lambda_{NN'}$, $\hat{\lambda}_{N_1N_1'}$ son los valores propios máximos para los cuales $\varkappa_{mn}$ y $\varkappa_{mn}$ son reales.

En el caso, más interesante en la práctica, de la onda H_{10} tenemos

$$\psi_{10}=0,\quad \hat{\psi}_{10}(x,\ y)=\sqrt{\frac{2}{ab}}\cos\frac{\pi}{a}x,\quad \hat{\lambda}_{10}=\left(\frac{\pi}{a}\right)^2$$

y para $\widetilde{R}^{(1)}$ obtenemos la fórmula de Sleter.

$$\widetilde{R}^{(a)}=\frac{l^2}{ab}\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}\frac{\operatorname{sen}^2\frac{\pi}{a}d}{\sqrt{1-\left(\frac{\pi}{ak}\right)^2}} \tag{2}$$

(las fórmulas (1) y (2) están dadas en el sistema de unidades prácticas).

b) Sea que el dipolo semiondular está orientado a lo largo del eje y y sus extremos se hallan en los puntos $M_1(d,\ y_1)$ y $M_2(d,\ y_2)$ además $y_2-y_1=$ $=\frac{\lambda}{2}=\frac{\pi}{k}$. La distribución de la corriente dentro del dipolo se da por la fórmula

$$I=I_0\operatorname{sen}k(y-y_1).$$

La resistencia de radiación es igual a

$$\widetilde{R}^{(a)}=\frac{8\pi}{c}k\sum_{m=1}^{N}\sum_{n=0}^{N'}\frac{2\varepsilon_n}{ab}\,\frac{\operatorname{sen}^2\frac{\pi m}{a}d\cos^2\frac{\pi n}{b}\left(y_1+\frac{\pi}{2k}\right)\cos^2\frac{\pi n}{2bk}}{p_{mn}\left[k^2-\left(\frac{\pi n}{b}\right)^2\right]}$$

$$(\lambda_{mn}<k^2)$$

donde

$$p_{mn}=\sqrt{\lambda_{mn}-k^2},\quad \lambda_{mn}=\pi^2\left(\frac{m^2}{a^2}+\frac{n^2}{b^2}\right),\quad \varepsilon_n=\begin{cases}1, & n=0,\\ 2, & n\neq 0.\end{cases}$$

Los límites superiores de sumación N y N' se hallan de la condición $\lambda_{mn}<k^2$.

COMPLEMENTO

1. Diferentes sistemas ortogonales de coordenadas

Sean x, y, z las coordenadas cartesianas de cierto punto y x_1, x_2, x_3, las coordenadas curvilíneas ortogonales de este punto. El cuadrado del elemento de longitud se expresa por la fórmula

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 = h_1^2 dx_1^2 + h_2^2 dx_2^2 + h_3^2 dx_3^2,$$

donde

$$h_i = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial x_i}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial x_i}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial x_i}\right)^2} \quad (i = 1,\ 2,\ 3)$$

son los coeficientes métricos o los coeficientes de Lamé. El sistema ortogonal de coordenadas se caracteriza completamente por tres coeficientes métricos h_1, h_2, h_3.

Damos la expresión general para los operadores grad, div, rot y el operador de Laplace Δ en el sistema curvilíneo ortogonal de coordenadas:

$$\text{grad } u \sum_{j=1}^{3} \frac{1}{h_j} \frac{\partial u}{\partial x_j} i_j,$$

$$\text{div } A = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left[\frac{\partial}{\partial x_1} (h_2 h_3 A_1) + \frac{\partial}{\partial x_2} (h_3 h_1 A_2) + \frac{\partial}{\partial x_3} (h_1 h_2 A_3) \right],$$

$$\text{rot } A = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \begin{vmatrix} h_1 i_1 & h_2 i_2 & h_3 i_3 \\ \frac{\partial}{\partial x_1} & \frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{\partial}{\partial x_3} \\ h_1 A_1 & h_2 A_2 & h_3 A_3 \end{vmatrix},$$

$$\Delta u = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left[\frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{h_2 h_3}{h_1} \frac{\partial u}{\partial x_1} \right) + \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\frac{h_3 h_1}{h_2} \frac{\partial u}{\partial x_2} \right) + \right.$$
$$\left. + \frac{\partial}{\partial x_3} \left(\frac{h_1 h_2}{h_3} \frac{\partial u}{\partial x_3} \right) \right],$$

donde i_1, i_2, i_3, son los vectores unitarios básicos; $A = (A_1, A_2, A_3)$, un vector arbitrario, u—escalar, $A_s = A_s(x_1, x_2, x_3)$; $s = 1, 2, 3$; $u = u(x_1, x_2, x_3)$.

1. Las coordenadas rectangulares

$$x_1 = x, \quad x_2 = y, \quad x_3 = z, \ h_1 = 1, \quad h_2 = 1, \quad h_3 = 1,$$

$$\text{grad } u = \frac{\partial u}{\partial x} i + \frac{\partial u}{\partial y} j + \frac{\partial u}{\partial z} k, \quad \text{div } A = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z},$$

$$\operatorname{rot} A=\begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix}=\left(\frac{\partial A_z}{\partial y}-\frac{\partial A_y}{\partial z}\right) i+\ldots,$$

$$\Delta u=u_{xx}+u_{yy}+u_{zz},$$

donde $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$, son los vectores unitarios directores de los ejes x, y, z.

2. Las coordenadas cilíndricas

$$x_1=r, \quad x_2=\varphi, \quad x_3=z$$

están relacionadas con las coordenadas rectangulares por las ecuaciones

$$x=r\cos\varphi, \quad y=r\operatorname{sen}\varphi, \quad z=z.$$

Las superficies de coordenadas: $r=\text{const}$ son cilindros; $\varphi=\text{const}$, planos; $z=\text{const}$, planos.

Los coeficientes métricos son iguales a

$$h_1=1, \quad h_2=r, \quad h_3=1,$$

de modo que

$$\operatorname{grad} u=\frac{\partial u}{\partial r} i_1+\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \varphi} i_2+\frac{\partial u}{\partial z} i_3,$$

$$\operatorname{div} A=\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rA_1)+\frac{1}{r}\frac{\partial A_2}{\partial \theta}+\frac{\partial A_3}{\partial z},$$

$$\operatorname{rot} A=\left(\frac{1}{r}\frac{\partial A_3}{\partial \varphi}-\frac{\partial A_2}{\partial z}\right) i_1+\left(\frac{\partial A_1}{\partial z}-\frac{\partial A_3}{\partial r}\right) i_2+$$

$$+\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rA_2)-\frac{1}{r}\frac{\partial A_1}{\partial \varphi}\right] i_3,$$

$$\Delta u=\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}.$$

3. Las coordenadas esféricas

$$x_1=r, \quad x_2=\theta, \quad x_3=\varphi$$

se relacionan con las coordenadas rectangulares por las fórmulas

$$x=r\operatorname{sen}\theta\cos\varphi, \quad y=r\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\varphi, \quad z=r\cos\theta.$$

Las superficies de coordenadas: esferas concéntricas $r=\text{const}$; planos $\varphi=\text{const}$; conos $\theta=\text{const}$.

Los coeficientes métricos son iguales a

$$h_1=1, \quad h_2=r, \quad h_3=r\operatorname{sen}\theta,$$

de modo que

$$\operatorname{grad} u=\frac{\partial u}{\partial r} i_1+\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta} i_2+\frac{1}{r\operatorname{sen}\theta}\frac{\partial u}{\partial \varphi} i_3,$$

$$\operatorname{div} A=\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2A_1)+\frac{1}{r\operatorname{sen}\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}(\operatorname{sen}\theta\, A_2)+\frac{1}{r\operatorname{sen}\theta}\frac{\partial A_3}{\partial \varphi},$$

$$\operatorname{rot} A=\frac{1}{r\operatorname{sen}\theta}\left[\frac{\partial}{\partial\theta}(\operatorname{sen}\theta A_3)-\frac{\partial A_2}{\partial\varphi}\right]i_1+$$

$$+\frac{1}{r}\left[\frac{1}{\operatorname{sen}\theta}\frac{\partial A_1}{\partial\varphi}-\frac{\partial}{\partial r}(rA_3)\right]i_2+\frac{1}{r}\left[\frac{\partial}{\partial r}(rA_2)-\frac{\partial A_1}{\partial\theta}\right]i_3,$$

$$\Delta u=\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial u}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2\operatorname{sen}\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\operatorname{sen}\theta\frac{\partial u}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{r^2\operatorname{sen}^2\theta}\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2}.$$

4. Las coordenadas elípticas

$$x_1=\lambda,\quad x_2=\mu,\quad x_3=z$$

se determinan mediante las fórmulas de transformación

$$x=c\lambda\mu,\quad y=c\sqrt{(\lambda^2-1)(1-\mu^2)},\quad z=z,$$

donde c es el multiplicador de escala.

Los coeficientes métricos son iguales a

$$h_1=c\sqrt{\frac{\lambda^2-\mu^2}{\lambda^2-1}},\quad h_2=c\sqrt{\frac{\lambda^2-\mu^2}{1-\mu^2}},\quad h_3=1.$$

Las superficies de coordenadas: $\lambda=\text{const}$ son cilindros de sección elíptica con los focos en los puntos $x=\pm c$, $y=0$; $\mu=\text{const}$, una familia de cilindros hiperbólicos confocales; $z=\text{const}$, unos planos.

5. Las coordenadas parabólicas

Si r, θ, son las coordenadas polares de un punto sobre el plano entonces las coordenadas parabólicas pueden ser introducidas mediante las fórmulas

$$x_1=\lambda=\sqrt{2r}\operatorname{sen}\frac{\theta}{2},\quad x_2=\mu=\sqrt{2r}\cos\frac{\theta}{2},\ x_3=z.$$

Las superficies de coordenadas $\lambda=\text{const}$ y $\mu=\text{const}$ representan cilindros parabólicos intersecados con las directrices paralelas al eje z.

La relación con las coordenadas cartesianas se da por las fórmulas

$$x=\frac{1}{2}(\mu^2-\lambda^2)\quad y=\lambda\mu,\quad z=z.$$

Los coeficientes métricos son

$$h_1=h_2=\sqrt{\lambda^2+\mu^2},\quad h_3=1.$$

6. Las coordenadas elipsoidales

Se introducen mediante las ecuaciones ($a>b>c$).

$$\frac{x^2}{a^2+\lambda}+\frac{y^2}{b^2+\lambda}+\frac{z^2}{c^2+\lambda}=1\ (\lambda>c^2)$$ (ecuación del elipsoide)

$$\frac{x^2}{a^2+\mu}+\frac{y^2}{b^2+\mu}+\frac{z^2}{c^2+\mu}=1\ (-c^2>\mu>-b^2)$$ (ecuación del hiperboloide de una hoja)

$$\frac{x^2}{a^2+\nu}+\frac{y^2}{b^2+\nu}+\frac{z^2}{c^2+\nu}=1\ (-b^2>\nu>-a^2)$$ (ecuación del hiperboloide de dos hojas)

A cada punto (x, y, z) le corresponde sólo un sistema de valores λ, μ, ν. Los parámetros

$$x_1 = \lambda, \quad x_2 = \mu, \quad x_3 = \nu$$

se llaman coordenadas elipsoidales. Las coordenadas x, y, z se expresan explícitamente mediante λ, μ, ν:

$$x = \pm \sqrt{\frac{(\lambda + a^2)(\mu + a^2)(\nu + a^2)}{(b^2 - a^2)(c^2 - a^2)}},$$

$$y = \pm \sqrt{\frac{(\lambda + b^2)(\mu + b^2)(\nu + b^2)}{(c^2 - b^2)(a^2 - b^2)}},$$

$$z = \pm \sqrt{\frac{(\lambda + c^2)(\mu + c^2)(\nu + c^2)}{(a^2 - c^2)(b^2 - c^2)}}.$$

Los coeficientes de Lamé son iguales a

$$h_1 = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{(\lambda - \mu)(\lambda - \nu)}{R^2(\lambda)}}, \quad h^2 = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{(\mu - \nu)(\mu - \lambda)}{R^2(\mu)}},$$

$$h_3 = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{(\nu - \lambda)(\nu - \mu)}{R^2(\nu)}},$$

donde

$$R(s) = \sqrt{(s + a^2)(s + b^2)(s + c^2)} \quad (s = \lambda, \mu, \nu).$$

El operador de Laplace se puede representar en la forma

$$\Delta u = \frac{4}{(\lambda - \mu)(\lambda - \nu)(\mu - \nu)} \left[(\mu - \nu) R(\lambda) \frac{\partial}{\partial \lambda} \left(R(\lambda) \frac{\partial u}{\partial \lambda} \right) + \right.$$

$$\left. + (\nu - \lambda) R(\mu) \frac{\partial}{\partial \mu} \left(R(\mu) \frac{\partial u}{\partial \mu} \right) + (\lambda - \mu) R(\nu) \frac{\partial}{\partial \nu} \left(R(\nu) \frac{\partial u}{\partial \nu} \right) \right].$$

La solución particular de la ecuación de Laplace que depende sólo de λ, $U = U(\lambda)$ se da por la fórmula

$$U = A \int \frac{d\lambda}{R(\lambda)} + B,$$

donde A y B son constantes arbitrarias.

7. Coordenadas elipsoidales degeneradas

a) Las coordenadas elipsoidales degeneradas (α, β, φ) para el elipsoide alargado de revolución se determinan mediante las fórmulas

$$x = c \operatorname{sen} \beta \cos \varphi, \quad y = c \operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \beta \operatorname{sen} \varphi, \quad z = c \operatorname{ch} \alpha \cos \beta,$$

donde c es el multiplicador de escala, $0 \leqslant \alpha < \infty$, $0 \leqslant \beta \leqslant \pi$, $-\pi < \varphi \leqslant \pi$. Las superficies de coordenadas: elipsoides alargados de revolución $\alpha = \text{const}$; hiperboloides de dos hojas de revolución $\beta = \text{const}$; planos $\varphi = \text{const}$.

El cuadrado del operador lineal se da por la expresión

$$ds^2 = c^2 (\operatorname{sh}^2 \alpha + \operatorname{sen}^2 \beta)(d\alpha^2 + d\beta^2) + c^2 \operatorname{sh}^2 \alpha \operatorname{sen}^2 \beta \, d\varphi^2,$$

de donde para los coeficientes métricos se obtienen los valores

$$h_1 = h_2 = c\sqrt{\operatorname{sh}^2\alpha + \operatorname{sen}^2\beta}, \quad h_3 + h_\varphi = c \operatorname{sh} a \operatorname{sen}\beta.$$

La ecuación de Laplace es de la forma

$$\Delta u = \frac{1}{c^2(\operatorname{sh}^2\alpha + \operatorname{sen}^2\beta)}\left[\frac{1}{\operatorname{sh}\alpha}\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\operatorname{sh}\alpha\frac{\partial u}{\partial\alpha}\right) + \frac{1}{\operatorname{sen}\beta}\frac{\beta}{\partial\beta}\left(\operatorname{sen}\beta\frac{\partial u}{\partial\beta}\right) + \left(\frac{1}{\operatorname{sh}^2\alpha} + \frac{1}{\operatorname{sen}^2\beta}\right)\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2}\right] = 0.$$

b) El sistema de coordenadas elipsoidales degeneradas (α, β, φ) para el elipsoide aplastado de revolución se determinan mediante las igualdades

$$x = c\operatorname{ch}\alpha\operatorname{sen}\beta\cos\varphi, \quad y = c\operatorname{ch}\alpha\operatorname{sen}\beta\operatorname{sen}\varphi, \quad z = c\operatorname{sh}\alpha\cos\varphi,$$
$$0 \leqslant \alpha < \infty, \quad 0 \leqslant \beta \leqslant \pi, \quad -\pi < \varphi \leqslant \pi.$$

Las superficies de coordenadas: unos elipsoides aplastados de revolución $\alpha = \text{const}$, unos hiperboloides de una hoja de revolución $\beta = \text{const}$ y unos planos $\varphi = \text{const}$ que pasan por el eje z.

El cuadrado del elemento lineal y el operador de Laplace en el sistema examinado de coordenadas son de la forma

$$ds^2 = c^2(\operatorname{ch}^2\alpha - \operatorname{sen}^2\beta)(d\alpha^2 + d\beta^2) + c^2\operatorname{ch}^2\alpha \times \operatorname{sen}^2\beta\, d\varphi^2,$$

$$\Delta u = \frac{1}{c^2(\operatorname{ch}^2\alpha - \operatorname{sen}^2\beta)}\left[\frac{1}{\operatorname{ch}\alpha}\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\operatorname{ch}\alpha\frac{\partial u}{\partial\alpha}\right) + \frac{1}{\operatorname{sen}\beta}\frac{\partial}{\partial\beta}\left(\operatorname{sen}\beta\frac{\partial u}{\partial\beta}\right) + \left(\frac{1}{\operatorname{sen}^2\alpha} - \frac{1}{\operatorname{ch}^2\alpha}\right)\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2}\right].$$

8. Coordenadas toroidales

El sistema de coordenadas toroidales (α, β, φ) se determinan mediante las fórmulas

$$x = \frac{c\operatorname{sh}\alpha\cos\varphi}{\operatorname{ch}\alpha - \cos\beta}, \quad y = \frac{c\operatorname{sh}\alpha\operatorname{sen}\varphi}{\operatorname{ch}\alpha - \cos\beta}, \quad z = \frac{c\operatorname{sen}\beta}{\operatorname{ch}\alpha - \cos\beta},$$

donde c es el multiplicador de escala, $0 \leqslant \alpha < \infty$, $-\pi < \beta \leqslant \pi$, $-\pi < \varphi \leqslant \pi$.

Las superficies de coordenadas son en esencia toros $\alpha = \text{const}$

$$(\rho - c\operatorname{cth}\alpha)^2 + z^2 = \left(\frac{c}{\operatorname{sh}\alpha}\right)^2 \quad (\rho = \sqrt{x^2 + y^2});$$

esferas, $\beta = \text{const}$

$$(z - c\operatorname{ctg}\beta)^2 + \rho^2 = \left(\frac{c}{\operatorname{sen}\beta}\right)^2;$$

planos $\varphi = \text{const}$.

El cuadrado del elemento lineal en el sistema toroidal de coordenadas es de la forma

$$ds^2 = \frac{c^2}{(\operatorname{ch}\alpha - \cos\beta)^2}\left[d\alpha^2 + d\beta^2 + \operatorname{sh}^2\alpha\, d\varphi^2\right],$$

los coeficientes métricos son iguales a

$$h_\alpha = h_\beta = \frac{c}{\operatorname{ch}\alpha - \cos\beta}, \qquad h_\varphi = \frac{c \operatorname{sh}\alpha}{\operatorname{ch}\alpha - \cos\beta}$$

y el operador de Laplace se da por la expresión siguiente

$$\Delta u = \frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\frac{\operatorname{sh}\alpha}{\operatorname{ch}\alpha - \cos\beta}\frac{\partial u}{\partial\alpha}\right) + \frac{\partial}{\partial\beta}\left(\frac{\operatorname{sh}\alpha}{\operatorname{ch}\alpha - \cos\beta}\frac{\partial u}{\partial\beta}\right) + \frac{1}{(\operatorname{ch}\alpha - \cos\beta)\operatorname{sh}\alpha}\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2}.$$

Es conveniente introducir en vez de u una función nueva v mediante la relación

$$u = \sqrt{2\operatorname{ch}\alpha - 2\cos\beta}\cdot v,$$

con esto la ecuación $\Delta u = 0$ conduce a la ecuación

$$v_{\alpha\alpha} + v_{\beta\beta} + v_\alpha \operatorname{cth}\alpha + \frac{1}{4}v + \frac{1}{\operatorname{sh}^2\alpha}v_{\varphi\varphi} = 0.$$

9. Coordenadas bipolares

a) Coordenadas bipolares sobre el plano.
Las variables

$$x_1 = \alpha, \quad x_2 = \beta, \quad x_3 = z$$

se llaman las coordenadas bipolares si tiene lugar la igualdad

$$x = \frac{a \operatorname{sh}\alpha}{\operatorname{ch}\alpha - \cos\beta}, \quad y = \frac{a \operatorname{sen}\beta}{\operatorname{ch}\alpha - \cos\beta}, \quad z = z.$$

Los coeficientes métricos son iguales a

$$h_1 = h_2 = \frac{a}{\operatorname{ch}\alpha - \cos\beta}, \quad h_3 = 1.$$

b) Las coordenadas biesféricas

$$x_1 = \alpha, \quad x_2 = \beta, \quad x_3 = \varphi$$

se determinan mediante las fórmulas

$$x = \frac{c \operatorname{sen}\alpha \cos\varphi}{\operatorname{ch}\beta - \cos\alpha}, \quad y = \frac{c \operatorname{sen}\alpha \operatorname{sen}\varphi}{\operatorname{ch}\beta - \cos\alpha}, \quad z = \frac{c \operatorname{sh}\beta}{\operatorname{ch}\beta - \cos\alpha},$$

donde c es el multiplicador de escala, $0 \leqslant \alpha < \beta$; $-\infty < \beta < \infty$; $-\pi < \varphi \leqslant \pi$.

Estas fórmulas se representan en forma compacta

$$z + i\rho = ci \operatorname{ctg}\frac{\alpha + i\beta}{2} \qquad (\rho = \sqrt{x^2 + y^2}).$$

Superficies de coordenadas: superficies de forma de huso de revolución, $\alpha = \text{const}$:

$$(\rho - c \operatorname{ctg}\alpha)^2 + z^2 = \left(\frac{c}{\operatorname{sen}\alpha}\right)^2;$$

esferas, $\beta = \text{const}$:

$$\rho^2 + (z - c\,\text{cth}\,\beta)^2 = \left(\frac{c}{\text{sh}\,\beta}\right)^2;$$

planos, $\varphi = \text{const}$.

La expresión para el cuadrado del elemento lineal en las coordenadas bipolares esféricas es de la forma

$$ds^2 = \frac{c^2}{(\text{ch}\,\beta - \cos\alpha)^2}\,[d\alpha^2 + d\beta^2 + \text{sen}^2\,\alpha\,d\varphi^2],$$

de donde se deduce

$$h_1 = h_2 = \frac{c}{\text{ch}\,\beta - \cos\alpha}, \qquad h_3 = \frac{c\,\text{sen}\,\alpha}{\text{ch}\,\beta - \cos\alpha},$$

y la ecuación de Laplace toma la forma

$$\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\frac{\text{sen}\,\alpha}{\text{ch}\,\beta - \cos\alpha}\,\frac{\partial u}{\partial\alpha}\right) + \frac{\partial}{\partial\beta}\left(\frac{\text{sen}\,\alpha}{\text{ch}\,\beta - \cos\alpha}\,\frac{\partial u}{\partial\beta}\right) + \frac{1}{\text{sen}\,\alpha\,(\text{ch}\,\beta - \cos\alpha)}\,\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2} = 0.$$

Para resolver la ecuación de Laplace es cómoda la sustitución

$$u = \sqrt{2\,\text{ch}\,\beta - 2\cos\alpha}\,v.$$

Entonces, para la función v se obtiene la ecuación

$$v_{\alpha\alpha} + v_{\beta\beta} + v_\alpha\,\text{ctg}\,\alpha - \frac{1}{4}\,v + \frac{1}{\text{sen}^2\,\alpha}\,v_{\varphi\varphi} = 0.$$

10. Coordenadas esferoidales

a) Las coordenadas esferoidales alargadas

$$x_1 = \lambda, \quad x_2 = \mu, \quad x_3 = \varphi,$$

$$x = c\lambda\mu, \quad y = c\sqrt{(\lambda^2 - 1)(1 - \mu^2)}\cos\varphi, \quad z = c\sqrt{(\lambda^2 - 1)(1 - \mu^2)}\,\text{sen}\,\varphi,$$

$$\lambda \geqslant 1, \quad -1 \leqslant \mu \leqslant 1, \quad 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi,$$

$$h_1 = c\sqrt{\frac{\lambda^2 - \mu^2}{\lambda^2 - 1}}, \quad h_2 = c\sqrt{\frac{\lambda^2 - \mu^2}{1 - \mu^2}}, \quad h_3 = c\sqrt{(\lambda^2 - 1)(1 - \mu^2)}.$$

b) Las coordenadas esferoidales aplastadas

$$x_1 = \lambda, \quad x_2 = \mu, \quad x_3 = \varphi,$$

$$x = c\lambda\mu\,\text{sen}\,\varphi, \quad y = c\sqrt{(\lambda^2 - 1)\,(1 - \mu^2)}, \quad z = c\lambda\mu\cos\varphi.$$

Las superficies $\lambda = \text{const}$ son esferoides aplastados; $\mu = \text{const}$, hiperboloides de una hoja.

Los coeficientes métricos son

$$h_1 = c\sqrt{\frac{\lambda^2 - \mu^2}{\lambda^2 - 1}}, \quad h^2 = c\sqrt{\frac{\lambda^2 - \mu^2}{1 - \mu^2}}, \quad h_3 = c\lambda\mu.$$

11. Coordenadas paraboloidales

Las variables

$$x_1 = \lambda, \quad x_2 = \mu, \quad x_3 = \varphi$$

que se determinan por las relaciones

$$x = \lambda\mu \cos \varphi, \quad y = \lambda\mu \operatorname{sen} \varphi, \quad z = {}^1/_2 (\lambda^2 - \mu^2)$$

se llaman coordenadas paraboloidales. Los coeficientes métricos son iguales a

$$h_1 = h_2 = \sqrt{\lambda^2 + \mu^2}, \quad h_3 = \lambda\mu.$$

Las superficies de coordenadas λ = const, μ = const, son parabolas de revolución alrededor del eje de simetría Oz.

II. Algunas fórmulas del análisis vectorial

Notaciones: $\boldsymbol{a}$, función vectorial, u, función escalar.

$$[[\boldsymbol{ab}]\, \boldsymbol{c}] = (\boldsymbol{ac})\, \boldsymbol{b} - (\boldsymbol{bc})\, \boldsymbol{a},$$
$$[\boldsymbol{a}\, [\boldsymbol{bc}]] = \boldsymbol{b}\, (\boldsymbol{ac}) - \boldsymbol{c}\, (\boldsymbol{ab}),$$
$$\operatorname{grad} (uv) = u \operatorname{grad} v + v \operatorname{grad} u,$$
$$\operatorname{div} (u\boldsymbol{a}) = \boldsymbol{a} \operatorname{grad} u + u \operatorname{div} \boldsymbol{a},$$
$$\operatorname{rot} (u\boldsymbol{a}) = [\boldsymbol{a} \operatorname{grad} u] + u \operatorname{rot} \boldsymbol{a},$$
$$\operatorname{div} [\boldsymbol{ab}] = \boldsymbol{b} \operatorname{rot} \boldsymbol{a} - \boldsymbol{a} \operatorname{rot} \boldsymbol{b},$$
$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \boldsymbol{a} = \operatorname{grad} \operatorname{div} \boldsymbol{a} - \Delta \boldsymbol{a},$$
$$\operatorname{grad} (\boldsymbol{ab}) = \boldsymbol{a} \operatorname{div} \boldsymbol{b} + \boldsymbol{b} \operatorname{div} \boldsymbol{a} + [\boldsymbol{a} \operatorname{rot} \boldsymbol{b}] + [\boldsymbol{b} \operatorname{rot} \boldsymbol{a}],$$
$$\operatorname{rot} [\boldsymbol{ab}] = \boldsymbol{a} \operatorname{div} \boldsymbol{b} - \boldsymbol{b} \operatorname{div} \boldsymbol{a} + (\boldsymbol{b}\nabla)\, \boldsymbol{a} - (\boldsymbol{a}\nabla)\, \boldsymbol{b},$$

donde

$$(\boldsymbol{b}\nabla)\, \boldsymbol{a} = b_x \frac{\partial \boldsymbol{a}}{\partial x} + b_y \frac{\partial \boldsymbol{a}}{\partial y} + b_z \frac{\partial \boldsymbol{a}}{\partial z}.$$

III. Funciones especiales

1. Funciones trigonométircas

$$\cos z = 1 - \frac{1}{2!} z^2 + \frac{1}{4!} z^4 - \ldots = \frac{1}{2} (e^{iz} + e^{-iz}) = \operatorname{ch} (iz),$$

$$\operatorname{sen} z = z - \frac{1}{3!} z^3 + \frac{1}{5!} z^5 - \ldots = \frac{1}{2i} (e^{iz} - e^{-iz}) = -i \operatorname{sh} (iz),$$

$$\cos (x + y) = \cos x \cos y - \operatorname{sen} x \operatorname{sen} y,$$
$$\operatorname{sen} (x + y) = \operatorname{sen} x \cos y + \cos x \operatorname{sen} y,$$
$$\cos x \cos y = \frac{1}{2} \cos (x + y) + \frac{1}{2} \cos (x - y),$$
$$\operatorname{sen} x \operatorname{sen} y = -\frac{1}{2} \cos (x + y) + \frac{1}{2} \cos (x - y).$$

2. Funciones hiperbólicas

$$\operatorname{ch} z = 1 + \frac{1}{2!} z^2 + \frac{1}{4!} z^4 + \ldots = \frac{1}{2} (e^z + e^{-z}) = \cos (iz),$$

$$\operatorname{sh} z = z + \frac{1}{3!} z^3 + \frac{1}{5!} z^5 + \ldots = \frac{1}{2} (e^z - e^{-z}) = - i \operatorname{sen} (iz),$$

$$\operatorname{ch}^2 z - \operatorname{sh}^2 z = 1,$$

$$\operatorname{ch} (x + y) = \operatorname{ch} x \operatorname{ch} y + \operatorname{sh} x \operatorname{sh} y,$$

$$\operatorname{sh} (x + y) = \operatorname{sh} x \operatorname{ch} y + \operatorname{ch} x \operatorname{sh} y.$$

3. Integral de los errores

$$\Phi (z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^z e^{-\alpha^2} d\alpha.$$

Desarrollo en serie para z pequeños

$$\Phi (z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \left(z - \frac{z^3}{1!\,3} + \frac{z^5}{2!\,5} - \ldots \right).$$

Desarrollo asintótico para z grandes

$$\Phi (z) = 1 - \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{e^{-z^2}}{z} \left(1 - \frac{1}{2z^2} + \frac{3 \cdot 4}{(2z)^4} - \frac{4 \cdot 5 \cdot 6}{(2z)^6} + \ldots \right).$$

En la tabla 1 están dados los valores de $\Phi (z)$ para $0 \leqslant z \leqslant 2{,}3$.

4. Función gamma

$$\Gamma (z) = \int_0^\infty e^{-t} t^{z-1} dt \; (Re\, z > 0), \quad \Gamma (z + 1) = z \Gamma (z),$$

$$\Gamma (n + 1) = n!, \quad \Gamma (1) = 1, \quad \Gamma \left(\frac{1}{2} \right) = \sqrt{\pi},$$

$$\Gamma (z)\, \Gamma (1 - z) = \frac{\pi}{\operatorname{sen} \pi z}, \quad \Gamma (2z) = \frac{2^{2z-1}}{\sqrt{\pi}} \Gamma (z)\, \Gamma \left(z + \frac{1}{2} \right),$$

$$\Gamma (z) \to \sqrt{2\pi}\, z^{z - \frac{1}{2}} e^{-z} \quad \text{para} \quad z \gg 1.$$

La función beta

$$B (x, y) = \int_0^1 t^{x-1} (1 - t)^{y-1} dt = \frac{\Gamma (x)\, \Gamma (y)}{\Gamma (x + y)} =$$

$$= 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}^{2x-1} \varphi \cos^{2y-1} \varphi \, d\varphi \; (\operatorname{Re} x > 0), \operatorname{Re} y > 0).$$

5. Funciones elípticas

$$\int_0^x \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}=\mathrm{sn}^{-1}(x, k),$$

$$\int_x^1 \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(x^2+k^2-1)}}=\mathrm{dn}^{-1}(x, k),$$

$$\int_x^1 \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2+k^2x^2)}}=\mathrm{cn}^{-1}(x, k),$$

$$\int_0^x \frac{dx}{\sqrt{(1+x^2)(1+k'^2x^2)}}=\mathrm{tn}^{-1}(x, k),$$

$$K=\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}},$$

$$K'=\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-(k')^2x^2)}} \qquad k=\operatorname{sen}\alpha, \quad k'=\cos\alpha.$$

6. Funciones de Bessel

$$J_n(z)=\frac{1}{n!}\left(\frac{z}{2}\right)^n\left[1-\frac{\left(\frac{z}{2}\right)^2}{1!\,(n+1)}+\frac{\left(\frac{z}{2}\right)^4}{2!\,(n+1)(n+2)}-\dots\right]=$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k\left(\frac{z}{2}\right)^{2k+n}}{\Gamma(k+1)\,\Gamma(k+n+1)}\xrightarrow[z\to\infty]{}\sqrt{\frac{2}{\pi z}}\cos\left[z-\frac{1}{2}\pi\left(n+\frac{1}{2}\right)\right],$$

$$(\operatorname{Re} z>0),$$

$$N_n(z)=\frac{1}{\pi}\left[2\ln\left(\frac{z}{2}\right)+\gamma-\psi(n+1)\right]J_n(z)-$$

$$-\frac{1}{\pi}\sum_{m=0}^{n-1}\frac{(n-m-1)!}{m!\left(\frac{z}{2}\right)^{n-2m}}-\frac{1}{\pi}\sum_{m=1}^{\infty}(-1)^m\frac{\left(\frac{z}{2}\right)^{n+2m}}{m!\,(n+m)!}\times$$

$$\times\left[\sum_{k=1}^{m}\left(\frac{1}{k}+\frac{1}{k+n}\right)\right],$$

donde $\psi(n)=\frac{\Gamma'(n)}{\Gamma(n)}$,

$$N_0(z)\underset{z\to 0}{\longrightarrow}\frac{2}{\pi}(\ln z-0,11593), \quad n=0$$

$$N_n(z)\underset{z\to 0}{\longrightarrow}\frac{(n-1)!}{\pi}\left(\frac{2}{z}\right)^n; \quad n=1, 2, 3, \ldots,$$

$$N_n(z)\underset{z\to 0}{\longrightarrow}\sqrt{\frac{2}{\pi z}}\operatorname{sen}\left[z-\frac{1}{2}\pi\left(n+\frac{1}{2}\right)\right] \quad (\operatorname{Re} z>0),$$

$$J_{-n}(z)=(-1)^n J_n(z), \quad N_{-n}(z)=(-1)^n N_n(z),$$

$$\left.\begin{aligned} J_n(z)N'_n(z)-J'_n(z)N_n(z)=\Delta(J_n, N_n)=\frac{2}{\pi z} \\ N_{n-1}(z)J_n(z)-N_n(z)J_{n-1}(z)=\Delta(J_n, N_n)=\frac{2}{\pi z}, \end{aligned}\right\} \text{(el wronskiano)},$$

$$e^{-iz\operatorname{sen}\varphi}=\sum_{n=-\infty}^{\infty}J_n(z)e^{-in\varphi}, \quad J_n(z)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}e^{-iz\operatorname{sen}\varphi+in\varphi}d\varphi$$

(n es un número entero),

$$H_n^{(1)}(z)=J_n(z)+iN_n(z)\underset{z\to\infty}{\longrightarrow}\sqrt{\frac{2}{\pi z}}\,e^{i\left[z-\frac{\pi}{2}n-\frac{\pi}{4}\right]},$$

$$H_n^{(2)}(z)=J_n(z)-iN_n(z)\underset{z\to\infty}{\longrightarrow}\sqrt{\frac{2}{\pi z}}\,e^{-i\left[z-\frac{\pi}{2}n-\frac{\pi}{4}\right]}.$$

Las fórmulas recurrentes

$$\frac{2n}{x}Z_n(x)=Z_{n-1}+Z_{n+1}, \quad 2Z'_n(x)=Z_{n-1}-Z_{n+1}$$

ó

$$\frac{d}{dx}[x^n Z_n(x)]=x^n Z_{n-1}, \quad \frac{d}{dx}\left[\frac{Z_n(x)}{x^n}\right]=-\frac{Z_{n+1}}{x^n},$$

$$Z'_0=-Z_1, \quad [xZ_1(x)]'=xZ_0(x),$$

$$\int Z_0^2(\alpha x)\,x\,dx=\frac{1}{2}x^2[Z_0^2(\alpha x)+Z_1^2(\alpha x)],$$

$$\int Z_m^2(\alpha x)\,x\,dx=\frac{1}{2}x^2[Z_m^2(\alpha x)-Z_{m-1}(\alpha x)Z_{m+1}(\alpha x)].$$

Aquí $Z_n(x)=AJ_n(x)+BN_n(x)$ es cualquier solución de la ecuación de Bessel

$$\frac{1}{x}\frac{d}{dx}\left(x\frac{dZ_n}{dx}\right)+\left(1-\frac{n^2}{x^2}\right)Z_n=0,$$

Las funciones del argumento imaginario

$$I_n(x)=\left(\frac{1}{i}\right)^n J_n(ix)\underset{x\to\infty}{\longrightarrow}\frac{1}{\sqrt{2\pi x}}e^x,\quad I_n(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{2k+n}}{\Gamma(k+1)\Gamma(k+n+1)},$$

$$K_n(x)=\frac{1}{2}\pi i^{n+1}N_n^{(1)}(ix)\underset{x\to\infty}{\longrightarrow}\sqrt{\frac{\pi}{2x}}e^{-x},\quad K_n(x)\underset{x\to 0}{\longrightarrow}\frac{(n-1)!}{2}\left(\frac{2}{x}\right)^n+\ldots,$$
$$n>0,$$

$$I_{-n}(x)=I_n(x),\quad K_n(x)=K_{-n}(x),$$

$$K_0(x)\underset{x\to 0}{\longrightarrow}-\left(\ln\frac{x}{2}+C\right)+\ldots,\quad C=0{,}5772 \text{ es la constante de Euler},$$

$$I_n(x)K_n'(x)-I_n'(x)K_n(x)=\Delta(I_n,\ K_n)=-\frac{1}{x},$$

$$I_n(x)K_{n-1}(x)+I_{n-1}(x)K_n(x)=-\Delta(I_n,\ K_n)=\frac{1}{x},$$

$$I_{n-1}(x)-I_{n+1}(x)=\frac{2n}{x}I_n(x),\quad I_{n-1}(x)+I_{n+1}(x)=2I_n'(x),$$

$$Z_n''+\frac{1}{x}Z_n'-\left(1+\frac{n^2}{x^2}\right)Z_n=0,\quad Z_n=I_n \quad \text{ó} \quad Z_n=K_n.$$

Algunas integrales

$$\int_0^\infty e^{-at}J_n(bt)\frac{dt}{t}=\frac{1}{ab^n}[\sqrt{a^2+b^2}-a]^n.$$

$$\int_0^\infty e^{-at}J_n(bt)t^n\,dt=\frac{(2b)^n\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)(a^2+b^2)^{n+\frac{1}{2}}},$$

$$\int_0^\infty e^{-at}N_0(bt)\,dt=\frac{-\frac{2}{\pi}}{\sqrt{a^2+b^2}}\ln\frac{a+\sqrt{a^2+b^2}}{a}$$

(a y b son reales y positivos)

7. Polinomios de Legendre

La ecuación $[(1-x^2)y']'+n(n+1)y=0,\quad (-1<x<1),$

$$\frac{1}{R}=\frac{1}{\sqrt{r_0^2+r^2-2rr_0\cos\theta}}=\begin{cases}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{r_0}\left(\frac{r}{r_0}\right)^n P_n(\cos\theta) & \text{para} \quad r<r_0,\\ \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{r}\left(\frac{r_0}{r}\right)^n P_n(\cos\theta) & \text{para} \quad r>r_0,\end{cases}$$

$$(n+1)\,P_{n+1}(x) - x\,(2n+1)\,P_n(x) + nP_{n-1}(x) = 0,$$

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!}\,\frac{d^n}{dx^n}\,[(x^2-1)^n].$$

La ecuación de las funciones asociadas

$$[(1-x^2)\,y']' + \left(n\,(n+1) - \frac{m^2}{1-x^2}\right)\,y = 0,$$

$$\int_{-1}^{1} P_n^{(m)}(x)\,P_k^{(m)}(x)\,dx = \frac{2}{2n+1}\,\frac{(n+m)!}{(n-m)!}\,\delta_{kn}, \qquad \delta_{kn} = \begin{cases} 1, & k = n, \\ 0, & k \neq n, \end{cases}$$

$$P_n^{(m)}(x) = (1-x^2)^{\frac{m}{2}}\,\frac{d^m}{dx^m}\,P_n(x),$$

$$e^{i\rho\cos\theta} = \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1)\,i^n \psi_n(\rho)\,P_n(\cos\theta),$$

$$\psi_n(\rho) = \sqrt{\frac{\pi}{2\rho}}\,J_{n+\frac{1}{2}}(\rho),$$

$$\frac{e^{ikR}}{ikR} = \begin{cases} \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (2n+1)\,\zeta_n^{(1)}(\rho_0)\,\psi_n(\rho)\,P_n(\cos\theta), & r < r_0, \\ \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (2n+1)\,\psi_n(\rho_0)\,\zeta_n^{(1)}(\rho)\,P_n(\cos\theta), & r > r_0, \end{cases}$$

$$\zeta_n^{(1)}(\rho) = \sqrt{\frac{\pi}{2\rho}}\,H^{(1)}_{n+\frac{1}{2}}(\rho),$$

$$R = \sqrt{r^2 + r_0^2 - 2rr_0\cos\theta},$$

$$\rho = kr, \qquad \rho_0 = kr_0.$$

$$\psi_n(\rho)\,\zeta_n^{(1)\prime}(\rho) - \zeta_n^{(1)}(\rho)\,\psi_n'(\rho) = \frac{i}{\rho},$$

$$\psi_0(\rho) = \frac{\operatorname{sen}\rho}{\rho}, \qquad \psi_1(\rho) = \frac{1}{\rho}\left(\frac{\operatorname{sen}\rho}{\rho} - \cos\rho\right),$$

$$\zeta_0^{(1)}(\rho) = \frac{e^{i\left(\rho-\frac{\pi}{2}\right)}}{\rho}, \qquad \zeta_1^{(1)}(\rho) = \frac{e^{i\left(\rho-\frac{\pi}{2}\right)}}{\rho}\left(\frac{1}{\rho} - i\right).$$

8. Función hipergeométrica $F(\alpha, \beta, \gamma)$

La ecuación

$$z\,(1-z)\,y'' + [\gamma - (\alpha+\beta+1)\,z]\,y' - \alpha\beta y = 0,$$

$$y = y_1 = F(\alpha, \beta, \gamma, z) = 1 + \frac{\alpha\beta}{1\cdot\gamma}\,z + \frac{\alpha\,(\alpha+1)\,\beta\,(\beta+1)}{1\cdot 2\cdot\gamma\,(\gamma+1)}\,z^2 + \ldots,$$

$$y = y_2 = z^{1-\gamma} F(\alpha - \gamma + 1,\ \beta - \gamma + 1,\ 2 - \gamma,\ z),$$

$$P_n(z) = F\left(-n,\ n+1,\ 1,\ \frac{1-z}{2}\right) = (-1)^n F\left(-n,\ n+1,\ 1,\ \frac{1+z}{2}\right),$$

$$P_n^{(m)}(z) = \frac{(n+m)!}{2^m m!\ (n-m)!} (1-z^2)^{\frac{m}{2}} F\left(m-n,\ m+n+1,\ m+1,\ \frac{1-z}{2}\right).$$

La función hipergeométrica confluente (degenerada)

$$F = F(\alpha,\ \gamma,\ \rho) = 1 + \frac{\alpha}{\gamma}\frac{\rho}{1} + \frac{\alpha(\alpha+1)\rho^2}{\gamma(\gamma+1)\,2!} + \ldots,$$

$$\rho\frac{d^2F}{d\rho^2} + (\gamma - \rho)\frac{dF}{d\rho} - \alpha F = 0.$$

IV. Tablas

Tabla 1

La integral de los errores $\Phi(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^z e^{-\alpha^2} \, d\alpha, \quad 0 \leqslant z \leqslant 2,3$

z	$\Phi(z)$	z	$\Phi(z)$	z	$\Phi(z)$	z	$\Phi(z)$
0,00	0,0000	0,40	0,4284	0,80	0,7421	1,20	0,9103
0,01	0,0113	0,41	0,4380	0,81	0,7480	1,21	0,9130
0,02	0,0226	0,42	0,4475	0,82	0,7538	1,22	0,9155
0,03	0,0338	0,43	0,4569	0,83	0,7595	1,23	0,9181
0,04	0,0451	0,44	0,4662	0,84	0,7651	1,24	0,9205
0,05	0,0564	0,45	0,4755	0,85	0,7707	1,25	0,9229
0,06	0,0676	0,46	0,4847	0,86	0,7761	1,26	0,9252
0,07	0,0789	0,47	0,4937	0,87	0,7814	1,27	0,9275
0,08	0,0901	0,48	0,5027	0,88	0,7867	1,28	0,9297
0,09	0,1013	0,49	0,5117	0,89	0,7918	1,29	0,9319
0,10	0,1125	0,50	0,5205	0,90	0,7969	1,30	0,9340
0,11	0,1236	0,51	0,5292	0,91	0,8019	1,31	0,9361
0,12	0,1348	0,52	0,5379	0,92	0,8068	1,32	0,9381
0,13	0,1459	0,53	0,5465	0,93	0,8116	1,33	0,9400
0,14	0,1569	0,54	0,5549	0,94	0,8163	1,34	0,9419
0,15	0,1680	0,55	0,5633	0,95	0,8209	1,35	0,9438
0,16	0,1790	0,56	0,5716	0,96	0,8254	1,36	0,9456
0,17	0,1900	0,57	0,5798	0,97	0,8299	1,37	0,9473
0,18	0,2009	0,58	0,5879	0,98	0,8342	1,38	0,9490
0,19	0,2118	0,59	0,5959	0,99	0,8385	1,39	0,9507
0,20	0,2227	0,60	0,6039	1,00	0,8427	1,40	0,9523
0,21	0,2335	0,61	0,6117	1,01	0,8468	1,41	0,9539
0,22	0,2443	0,62	0,6194	1,02	0,8508	1,42	0,9554
0,23	0,2550	0,63	0,6170	1,03	0,8548	1,43	0,9569
0,24	0,2657	0,64	0,6346	1,04	0,8586	1,44	0,9583
0,25	0,2763	0,65	0,6420	1,05	0,8624	1,45	0,9597
0,26	0,2869	0,66	0,6494	1,06	0,8661	1,46	0,9611
0,27	0,2974	0,67	0,6566	1,07	0,8698	1,47	0,9624
0,28	0,3079	0,68	0,6633	1,08	0,8733	1,48	0,9637
0,29	0,3183	0,69	0,6708	1,09	0,8768	1,49	0,9649
0,30	0,3286	0,70	0,6778	1,10	0,8802	1,50	0,9661
0,31	0,3389	0,71	0,6847	1,11	0,8835	1,51	0,9661
0,32	0,3491	0,72	0,6914	1,12	0,8868	1,6	0,9763
0,33	0,3593	0,73	0,6981	1,13	0,8900	1,7	0,9838
0,34	0,3694	0,74	0,7047	1,14	0,8931	1,8	0,9891
0,35	0,3794	0,75	0,7112	1,15	0,8961	1,9	0,9928
0,36	0,3893	0,76	0,7175	1,16	0,8991	2,0	0,9953
0,37	0,3992	0,77	0,7238	1,17	0,9020	2,1	0,9970
0,38	0,4090	0,78	0,7300	1,18	0,9048	2,2	0,9981
0,39	0,4187	0,79	0,7361	1,19	0,9076	2,3	0,9989

Tabla 2

Raíces de las ecuaciones características $J_0(\mu)=0$ y $J_1(\mu)=0$

n	Raíces μ_n de la ecuación $J_0(\mu)=0$	Raíces μ_n de la ecuación $J_1(\mu)=0$	n	Raíces μ_n de la ecuación $J_0(\mu)=0$	Raíces μ_n de la ecuación $J_1(\mu)=0$
1	2,4048	3,8317	6	18,0711	19,6159
2	5,5201	7,0156	7	21,2116	21,7601
3	8,6537	10,1735	8	24,3525	25,9037
4	11,7915	13,3237	9	27,4935	29,0468
5	14,9309	16,4706	10	30,6346	32,1897

Tabla 3

Raíces de la ecuación característica $\frac{J_0(\mu)}{J_1(\mu)}=\frac{1}{lh}\mu$

$lh=h$	μ_1	μ_2	μ_3	μ_4	μ_5	μ_6
0,0	0,0000	3,8317	7,0156	10,1735	13,3237	16,4706
0,01	0,1412	3,8343	7,0170	10,1745	13,3244	16,4712
0,02	0,1995	3,8369	7,0184	10,1754	13,3252	16,4718
0,03	0,2814	3,8421	7,0213	10,1774	13,3267	16,4731
0,06	0,3438	3,8473	7,0241	10,1794	13,3282	16,4743
0,08	0,3960	3,8525	7,0270	10,1813	13,3297	16,4755
0,10	0,4417	3,8577	7,0298	10,1833	13,3312	16,4767
0,15	0,5376	3,8706	7,0369	10,1882	13,3349	16,4797
0,20	0,6170	3,8835	7,0440	10,1931	13,3387	16,4828
0,30	0,7465	3,9091	7,0582	10,2029	13,3462	16,4888
0,40	0,8516	3,9344	7,0723	10,2127	13,3537	16,4949
0,50	0,9408	3,9594	7,0864	10,2225	13,3611	16,5010
0,60	1,0184	3,9841	7,1004	10,2322	13,3686	16,5070
0,70	1,0873	4,0085	7,1143	10,2419	13,3761	16,5131
0,80	1,1490	4,0325	7,1282	10,2519	13,3835	16,5191
0,90	1,2048	4,0562	7,1421	10,2613	13,3910	16,5251
1,0	1,2558	4,0795	7,1558	10,2710	13,3984	16,5312
1,5	1,4569	4,1902	7,2223	10,3188	13,4353	16,5612
2,0	1,5994	4,2910	7,2884	10,3658	13,4719	16,5910
3,0	1,7887	4,4634	7,4103	10,4566	13,5434	16,6499
4,0	1,9081	4,6018	7,5201	10,5423	13,6125	16,7073
5,0	1,9898	4,7131	7,6177	10,6223	13,6786	16,7630
6,0	2,0490	4,8033	7,7039	10,6964	13,7414	16,8168
7,0	2,0937	4,8772	7,7797	10,7646	13,8008	16,8684
8,0	2,1286	4,9384	7,8464	10,8271	13,8566	16,9179
9,0	2,1566	4,9897	7,9051	10,8842	13,9090	16,9650
10,0	2,1795	5,0332	7,9569	10,9363	13,9580	17,0099
15,0	2,2509	5,1773	8,1422	11,1367	14,1576	17,2008
20,0	2,2880	5,2568	8,2534	11,2677	14,2983	17,3442
30,0	2,3261	5,3410	8,3771	11,4221	14,4748	17,5348
40,0	2,3455	5,3846	8,4432	11,5081	14,5774	17,6508
50,0	2,3572	5,4112	8,4840	11,5621	14,6433	17,7272
60,0	2,3651	5,4291	8,5116	11,5990	14,6889	17,7807
80,0	2,3750	5,4516	8,5466	11,6461	14,7475	17,8502
100,0	2,3809	5,4652	8,5678	11,6747	14,7834	17,8931
∞	2,4048	5,5201	8,6537	11,7915	14,9309	18,0711

Tabla 4

Raíces μ_n de la ecuación característica $J_0(\mu)\,N_0(k\mu) - N_0(\mu)\,J_0(k\mu) = 0$

k	μ_1	μ_2	μ_3	μ_4	μ_5
1,2	15,7014	31,4126	47,1217	62,8304	78,5385
1,5	6,2702	12,5598	18,8451	25,1294	31,4133
2,0	3,1230	6,2734	9,4182	12,5614	15,7040
2,5	2,0732	4,1773	6,2754	8,3717	10,4672
3,0	1,5485	3,1291	4,7038	6,2767	7,8487
3,5	1,2339	2,5002	3,7608	5,0196	6,2776
4,0	1,0244	2,0809	3,1322	4,1816	5,2301

Tabla 5

Raíces de la ecuación característica $\operatorname{tg}\mu = -\frac{\mu}{h}$

h	μ_1	μ_2	μ_3	μ_4	μ_5	μ_6
0	1,5708	4,7124	7,8540	10,9956	14,1372	17,2788
0,1	1,6320	4,7335	7,8667	11,0047	14,1443	17,2845
0,2	1,6887	4,7544	7,8794	11,0137	14,1513	17,2903
0,3	1,7414	4,7751	7,8920	11,0228	14,1584	17,2961
0,4	1,7906	4,7956	7,9046	11,0318	14,1654	17,3019
0,5	1,8366	4,8158	7,9171	11,0409	14,1724	17,3076
0,6	1,8798	4,8358	7,9295	11,0498	14,1795	17,3134
0,7	1,9203	4,8556	7,9419	11,0588	14,1865	17,3192
0,8	1,9586	4,8751	7,9542	11,0677	14,1935	17,3249
0,9	1,9947	4,8943	7,9665	11,0767	14,2005	17,7306
1,0	2,0288	4,9132	7,9787	11,0856	14,2075	17,3364
1,5	2,1746	5,0037	8,0382	11,1296	14,2421	17,3649
2,0	2,2889	5,0870	8,0965	11,1727	14,2764	17,3932
3,0	2,4557	5,2329	8,2045	11,2560	14,3434	17,4490
4,0	2,5704	5,3540	8,3029	11,3349	14,4080	17,5034
5,0	2,6537	5,4544	8,3914	11,4086	14,4699	17,5562
6,0	2,7165	5,5378	8,4703	11,4773	14,5288	17,6072
7,0	2,7654	5,6078	8,5406	11,5408	14,5847	17,6562
8,0	2,8044	5,6669	8,6031	11,5994	14,6374	17,7032
9,0	2,8363	5,7172	8,6587	11,6532	14,6860	17,7481
10,0	2,8628	5,7606	8,7083	11,7027	14,7335	17,7908
15,0	2,9476	5,9080	8,8898	11,8959	14,9251	17,9742
20,0	2,9930	5,9921	9,0019	12,0250	15,0625	18,1136
30,0	3,0406	6,0831	9,1294	12,1807	15,2380	18,3018
40,0	3,0651	6,1311	9,1986	12,2688	15,3417	18,4180
50,0	3,0801	6,1606	9,2420	12,3247	15,4090	18,4953
60,0	3,0901	6,1805	9,2715	12,3632	15,4559	18,5497
80,0	3,1028	6,2058	9,3089	12,4124	15,5164	18,6209
100,0	3,1105	6,2211	9,3317	12,4426	15,5537	18,6650
∞	3,1416	6,2832	9,4248	12,5664	15,7080	18,8496

Tabla 6

Las seis primeras raíces *) α_n de la ecuación $\alpha \operatorname{tg} \alpha = C$

C	α_1	α_2	α_3	α_4	α_5	α_6
0	0	3,1416	6,2832	9,4248	12,5664	15,7080
0,001	0,0316	3,1419	5,2833	9,4249	12,5665	15,7080
0,002	0,0447	3,1422	6,2835	9,4250	12,5665	15,7081
0,004	0,0632	3,1429	6,2838	9,4252	12,5667	15,7082
0,006	0,0774	3,1435	6,2841	9,4254	12,5668	16,7083
0,008	0,0893	3,1441	6,2845	9,4256	12,5670	15,7085
0,01	0,0998	3,1448	6,2848	9,4258	12,5672	15,7086
0,02	0,1410	3,1479	6,2864	9,4269	12,5680	15,7092
0,04	0,1987	3,1543	6,2895	9,4290	12,5696	15,7105
0,06	0,2425	3,1606	6,2927	9,4311	12,5711	15,7118
0,08	0,2791	3,1668	6,2959	6,4333	12,5727	15,7131
0,1	0,3111	3,1731	6,2991	9,4354	12,5743	15,7143
0,2	0,4328	3,2039	6,3148	9,4459	12,5823	15,7207
0,3	0,5218	3,2341	6,3305	9,4565	12,5902	15,7270
0,4	0,5932	3,2636	6,3461	9,4670	12,5981	15,7334
0,5	0,6533	3,2923	6,3616	9,4775	12,6060	15,7397
0,6	0,7051	3,3204	6,3770	9,4879	12,6139	15,7460
0,7	0,7506	3,3477	6,3923	9,4983	12,6218	15,7524
0,8	0,7910	3,3744	6,4074	9,5087	12,6296	15,7587
0,9	0,8274	3,4003	6,4224	9,5190	12,6375	15,7650
1,0	0,8603	3,4256	6,4373	9,5293	12,6453	15,7713
1,5	0,9882	3,5422	6,5097	9,5801	12,6841	15,8026
2,0	1,0769	3,6436	6,5783	9,6296	12,7223	15,8336
3,0	1,1925	3,8088	6,7040	9,7240	12,7966	15,8945
4,0	1,2646	3,9352	6,8140	9,8119	12,8678	15,9536
5,0	1,3138	4,0336	6,9096	9,8928	12,9352	16,0107
6,0	1,3496	4,1116	6,9924	9,9667	12,9988	16,0654
7,0	1,3766	4,1746	7,0640	10,0339	13,0584	16,1177
8,0	1,3978	4,2264	7,1263	10,0949	13,1141	16,1675
9,0	1,4149	4,2694	7,1806	10,1502	13,1660	16,2147
10,0	1,4289	4,3058	7,2281	10,2003	13,2142	16,2594
15,0	1,4729	4,4255	7,3959	10,3898	13,4078	16,4474
20,0	1,4961	4,4915	7,4954	10,5117	13,5420	16,5864
30,0	1,5202	4,5616	7,6057	10,6543	13,7085	16,7691
40,0	1,5325	4,5979	7,6647	10,7334	13,8048	16,8794
50,0	1,5400	4,6202	7,7012	10,7832	13,8666	16,9519
60,0	1,5451	4,6353	7,7259	10,8172	13,9094	17,0026
80,0	1,5514	4,6543	7,7573	10,8606	13,9644	17,0686
100,0	1,5552	4,6658	7,7764	10,8871	13,9981	17,1093
∞	1,5708	4,7124	7,8540	10,9956	14,1372	17,2788

*) Todas las raíces de esta ecuación son reales si $C > 0$.

Tabla 7

Las seis primeras raíces *) α_n de la ecuación α ctg $\alpha + C = 0$

C	α_1	α_2	α_3	α_4	α_5	α_6
−1,0	0	4,4934	7,7253	10,9041	14,0662	17,2208
−0,995	0,1224	4,4945	7,7259	10,9046	14,0666	17,2210
−0,99	0,1730	4,4956	7,7265	10,9050	14,0669	17,2213
−0,98	0,2445	4,4979	7,7278	10,9060	14,0676	17,2219
−0,97	0,2991	4,5001	7,7291	10,9069	14,0683	17,2225
−0,96	0,3450	4,5023	7,7304	10,9078	14,0690	17,2231
−0,95	0,3854	4,5045	7,7317	10,9087	14,0697	17,2237
−0,94	0,4217	4,5068	7,7330	10,9096	14,0705	17,2242
−0,93	0,4551	4,5090	7,7343	10,9105	14,0712	17,2248
−0,92	0,4860	4,5112	7,7356	10,9115	14,0719	17,2254
−0,91	0,5150	4,5134	7,7369	10,9124	14,0726	17,2260
−0,90	0,5423	4,5157	7,7382	10,9133	14,0733	17,2266
−0,85	0,6609	4,5268	7,7447	10,9179	14,0769	17,2295
−0,8	0,7593	4,5379	7,7511	10,9225	14,0804	17,2324
−0,7	0,9208	4,5601	7,7641	10,9316	14,0875	17,2382
−0,6	1,0528	4,5822	7,7770	10,9408	14,0946	17,2440
−0,5	1,1656	4,6042	7,7899	10,9499	14,1017	17,2498
−0,4	1,2644	4,6261	7,8028	10,9591	14,1088	17,2556
−0,3	1,3525	4,6479	7,8156	10,9682	14,1159	17,2614
−0,2	1,4320	4,6696	7,8284	10,9774	14,1230	17,2672
−0,1	1,5044	4,6911	7,8412	10,9865	14,1301	17,2730
0	1,5708	4,7124	7,8540	10,9956	14,1372	17,2788
0,1	1,6320	4,7335	7,8667	11,0047	14,1443	17,2845
0,2	1,6887	4,7544	7,8794	11,0137	14,1513	17,2903
0,3	1,7414	4,7751	7,8920	11,0228	14,1584	17,2961
0,4	1,7906	4,7956	7,9046	11,0318	14,1654	17,3019
0,5	1,8366	4,8158	7,9171	11,0409	14,1724	17,3076
0,6	1,8798	4,8358	7,9295	11,0498	14,1795	17,3134
0,7	1,9203	4,8556	7,9419	11,0588	14,1865	17,3192
0,8	1,9586	4,8751	7,9542	11,0677	14,1935	17,3249
0,9	1,9947	4,8943	7,9665	11,0767	14,2005	17,3306
1,0	2,0288	4,9132	7,9787	11,0856	14,2075	17,3364
1,5	2,1746	5,0037	8,0385	11,1296	14,2421	17,3649
2,0	2,2889	5,0870	8,0962	11,1727	14,2764	17,3932
3,0	2,4557	5,2329	8,2045	11,2560	14,3434	17,4490
4,0	2,5704	5,3540	8,3029	11,3349	14,4080	17,5034
5,0	2,6537	5,4544	8,3914	11,4086	14,4699	17,5562
6,0	2,7165	5,5378	8,4703	11,4773	14,5288	17,6072
7,0	2,7654	5,6078	8,5406	11,5408	14,5847	17,6562
8,0	2,8044	5,6669	8,6031	11,5994	14,6374	17,7032
9,0	2,8363	5,7172	8,6587	11,6532	14,6870	17,7481
10,0	2,8628	5,7606	8,7083	11,7027	14,7335	17,7908
15,0	2,9476	5,9080	8,8898	11,8959	14,9251	17,9742
20,0	2,9930	5,9921	9,0019	12,0250	15,0625	18,1136
30,0	3,0406	6,0831	9,1294	12,1807	15,2380	18,3018
40,0	3,0651	6,1311	9,1987	12,2688	15,3417	18,4180
50,0	3,0801	6,1606	9,2420	12,3247	15,4090	18,4953
60,0	3,0901	6,1805	9,2715	12,3632	15,4559	18,5497
80,0	3,1028	6,2058	9,3089	12,4124	15,5164	18,6209
100,0	3,1105	6,2211	9,3317	12,4426	15,5537	18,6650
∞	3,1416	6,2832	9,4248	12,5664	15,7080	18,8496

*) Todas las raíces de esta ecuación son reales si $C > -1$. Los valores negativos de C aparecen al examinar la esfera (véase § 2 cap. V).

BIBLIOGRAFÍA

I. Obras generales de estudio y colecciones de los problemas sobre las ecuaciones de la física matemática

1. *Крылов А. Н.* О некоторых дифференциальных уравнениях математической физики, имеющих приложение в технических вопросах.— М.: Гостехиздат, 1950. (*Krylov A. N.* Sobre ciertas ecuaciones diferenciales de la Física matemática)
2. *Смирнов В. И.* Курс высшей математики.— М.: Наука, 1974 (т. I, II); 1974 (т. III, ч. I); 1974 (т. III, ч. 2); 1958 (т. IV); 1959 (т. V). (*Smirnov V.I.* Curso de matemáticas superiores)
3. *Соболев С. Л.* Уравнения математической физики.— М.: Наука, 1966. (*Sóbolev S. L.* Ecuaciones de la física matemática).
4. *Петровский И. Г.* Лекции об уравнениях с частными производными.— М.: Физматгиз, 1961. (*Petrovski I. G.* Lecciones sobre las ecuaciones en derivadas parciales).
5. *Левин В. И. и Гросберг Ю. И.* Дифференциальные уравнения математической физики.— М.: Гостехиздат, 1951. (*Levin V. I., Grosberg Yu. N.* Ecuaciones diferenciales de la física matemática).
6. *Кошляков Н. С.* Основные дифференциальные уравнения математической физики.— М.: ОНТИ, 1936. (*Koshliakov N. S.* Principales ecuaciones diferenciales de la física matemática).
7. *Tijonov A. N., Samarsky A. A.* Ecuaciones de la Física matemática, 2-a edición, Editorial MIR, 1980.
8. *Владимиров В. С.* Уравнения математической физики. М.: Наука, 1971. (*Vladímirov V. S.* Ecuaciones de la Física matemática).
9. *Тихонов А. Н.* и *Свешников А. Г.* Теория функций комплексной переменной.— М.: Наука, 1979. (*Tíjonov A. N., Svéshnikov A. G.* Teoría de las funciones de variable compleja).
10. *Courant R., Hilbert D.* Methoden der mathematischen physik, Verlag von Julius Springer, 1931.

10a. *Courant R.* Partial differential equations, N.Y.— London, 1962.

11. *Webster A., Szegö G.* Partielle diffentialgleichungen der mathematischen physik, Teubner in Leipzig und Berlin, 1930.
12. *Гюнтер Н. М.* и *Кузьмин Р. О.* Сборник задач по высшей математике. — М.: Гостехиздат, 1951, ч. III. (*Giunter N. M., Kusmin R. O.* Problemas sobre la Matemática superior).
13. *Смирнов М. М.* Задачи по уравнениям математической физики.— М.: Наука, 1965. (*Smirnov M. M.* Problemas sobre las ecuaciones de la Física matemática).
14. *Будак Б. М.* Сборник задач по математической физике. М.: МГУ; ММИ, 1952. (*Budak B. M.* Problemas sobre la Física matemática).

II. Monografías sobre cuestiones especiales

15. *Гюнтер Н. М.* Теория потенциала и её применение к основным задачам математической физики.— М.: Гостехиздат, 1953. (*Giunter N. M.* Teoría del potencial y su aplicación a los problemas principales de la Física matemática).

16. *Кочин Н. Е.* Векторное исчисление и начала тензорного исчисления.— М.: Наука, 1965. (*Kochin N. E.* Cálculo vectorial y principios del cálculo tensorial).
18. *Кочин Н. Е., Кибель И. А., Розе Н. В.* Теоретическая гидромеханика.— М.: Физматгиз, 1963. (*Kochin N. E., Kibel I. A., Roze N. V.* Hidrodinámica teórica).
18. *Ландау Л. Д.* и *Лифшиц Е. М.* Механика сплошных сред.— М.: Гостехиздат, 1954. (*Landau L. D., Lifshitz E. M.* Mecánica de los medios continuos).
19. *Тамм И. Е.* Основы теории электричества.— М.: Наука, 1976. (*Tamm I. E.* Fundamentos de la teoría de la electricidad).
20. *Иваненко Д. Д.* и *Соколов А. А.* Классическая теория поля.— М.: Гостехиздат, 1944. (*Ivanenko D. D., Sokolov A. A.* Teoría clasica del campo).
21. *Седов Л. И.* Методы подобия размерности в механике.— М.: Наука, 1967. (*Sedov L. I.* Métodos de semejanza de la dimensión en la Mecánica).
22. *Сретенский Л. Н.* Теория ньютоновского потенциала.— М.: Гостехиздат, 1946. (*Sretenski L. N.* Teoría del potencial newtoniano).
23. *Гринберг Г. А.* Избранные вопросы математической теории электрических и магнитных явлений.— М.: Изд. АН СССР, 1948. (*Grinberg G. A.* Cuestiones escogidas de la teoría matemática de los fenómenos eléctricos y magnéticos).
24. *Лурье А. И.* Операционное исчисление. М.: Гостехиздат, 1950. (*Lurie A. I.* Cálculo operacional).
25. *Полубаринова-Кочина П. Я.* Теория движения грунтовых вод.— М.: Гостехиздат, 1952. (*Polubarinova-Kochina P. Ya.* Teoría del movimiento de las aguas subterráneas).
26. *Timoshenko S.* Vibration problems in engineering.
27. *Лыков А. В.* Теория теплопроводности.— М.: Высшая школа, 1967. (*Likov A. V.* Teoría de la conductibilidad térmica).
28. *Мусхелишвили Н. И.* Некоторые основные задачи математической теории упругости.— М.: Наука, 1966. (*Musgelishvili N. I.* Algunos problemas principales de la teoría matemática de elasticidad).
29. *Лебедев Н. Н.* Специальные функции и их приложения.— М.: Физматгиз, 1963. (*Lebedev N. N.* Funciones especiales y sus aplicaciones).
30. *Кузьмин Р. О.* Функции Бесселя.— М.: ОНТИ, 1935. (Funciones de Bessel).
31. *Введенский Б. А.* и *Аренберг А. Г.* Радиоволноводы.— М.: Гостехиздат, 1946. (*Vvedenski B. A., Arenberg A. G.* Guías de Ondas de Radio).
32. *Блохинцев Д. И.* Основы квантовой механики.— М.: Наука, 1976. (*Blogintsev D. I.* Fundamentos de la Mecánica cuántica).
33. *Frank Ph., Mises R.* Die differential — und integral — gleichungen der mechanik und physik, Druck und Verlag von Friedr, Braunschweig 1935.
34. *Love A. E. H.* A treatise of the mathematical theory of elasticity. Cambridge University Press.
35. *Trefftz E.* Mechanik der elastischen körper. Handbuch der physik, band IV, Berlin, 1928.
36. *Lamb H.* Hyndrodynamics. Cambridge University Press, 1916.
37. *Stratton J. A.* Electromagnetic theory. N.Y.— London, McGraw-Hill, 1941.
38. *Strut J. W., Baron Rayleigh.* The theory of sound. Macmiland and Co. Limited, London, 1926.
39. *Smythe W. R.* Static and dinamic electricity. N.Y.— Toronto—London, 1950.
40. *de Broylie L.* Problemes de propagations guidees des ondes electromagnetiques. Paris, 1941.
41. *Morse P.* Vibration and sound. McGraw-Hill, N.Y.-London, 1946.
42. *van der Pol B., Bremmer H.* Operational calculus based on the two-sided Laplace integral. Cambridge University Press, 1950.

43. *Carslaw H. S., Jaeger J. C.* Operational methods in applied mathematics, 1941.
44. *Carslaw H. S.* Introduction to the mathematical theory of the conduction of heat in solids. Dovfr Publications, N.Y., 1945.
45. *Watson G. N.* A treatise on the theory of Bessel funcions. 1945.
46. *Hobson E. W.* The theory of spherical and ellipsoidail harmonics. Cambridge University Press, 1931.
47. *Чарный И. А.* Неустановившееся движение реальной жидкости в трубах.— М.: Гостехиздат, 1951. (*Charni I. A.* Movimiento no estacionario del líquido real en los tubos).
48. *Лебедев Н. Н., Уфлянд Я. С., Скальская И. П.* Сборник задач по математической физике.— М.: Гостехиздат, 1955. (*Lébedev N. N., Ufliand Ya. S., Skalskaya I. P.* Problemas de la Física matemática).
49. *Sneddon I.* Fourier transforms. N.Y., 1951.
50. *Шилов Г. Е.* Математический анализ. Второй специальный курс.— М:. Наука, 1965. (*Shilov G. E.* Análisis matemático. Segundo curso especial).

A NUESTROS LECTORES:

Mir edita libros soviéticos traducidos al español, inglés, francés, árabe y otros idiomas extranjeros. Entre ellos figuran las mejores obras de las distintas ramas de la ciencia y la técnica: manuales para los centros de enseñanza superior y escuelas tecnológicas; literatura sobre ciencias naturales y médicas. También se incluyen monografías, libros de divulgación científica y ciencia-ficción. Dirijan sus opiniones a la Editorial Mir, I Rizhski per., 2, 129820, Moscú, I-110, GSP, URSS.

MIR publica:

Kostrikin A.

INTRODUCCIÓN AL ÁLGEBRA

Esta obra es un texto de estudio basado en el curso dictado por el autor, destacado matemático, miembro correspondiente de la Academia de Ciencias de la URSS, en la facultad de mecánica y matemáticas de la Universidad Estatal de Moscú.
En el libro, además de las cuestiones clásicas, de las propiedades generales de los polinomios y de las relaciones binarias, de los grupos de transformación, de las propiedades estructurales de los grupos más simples, etc., se incluyen otras de orden práctico como, por ejemplo, información sobre campos finitos, sobre campos de números algebraicos, cuestiones de divisibilidad de anillos, elementos de la teoría de imágenes.
En un tercer grado de complejidad y especificidad, pueden hallarse alguaas "exquisiteces" tales como la presentación del teorema de Sílov, los grupos lineales invariantes, imágenes de grupos de revolución y cuestiones sobre el álgebra no asociativa; lo que hace esta obra también interesante para los especialistas en álgebra.
El libro está destinado a estudiantes, graduados y profesores de los centros de enseñanza superior, así como a aquellos que se inician por su cuenta en el estudio del álgebra.